

APPROCHE DESCRIPTIVE DES ÉCOULEMENTS ; RÔLE DE LA VISCOSITÉ.

I : Écoulements laminaires ; écoulements turbulents.

1°) Analyse dimensionnelle et lois de similitude ; nombre de Reynolds.

- Comme tout autre domaine de la physique, la mécanique des fluides doit satisfaire la loi d'invariance dimensionnelle, qui conduit au théorème de Vaschy – Buckingham (encore appelé théorème π).

Les grandeurs adimensionnées π calculées suivant le théorème π se déterminent à partir des grandeurs caractérisant l'écoulement du fluide (grandeurs ρ , P , T , η , L , v , a , g , ...) et permettent de construire des modèles à partir de prototypes (des maquettes donc le plus souvent) qui induisent des lois dites de similitude, qu'on peut classer suivant les trois types :

➤ **Similitude géométrique :**

On parle de similitude géométrique entre le modèle et le prototype si les rapports de toutes les longueurs correspondantes du modèle et du prototype sont égaux (les mathématiciens parleraient d'homothétie !) :

$$\frac{L_{\text{modèle}}}{L_{\text{prototype}}} = r_L \text{ constant} \rightarrow \frac{S_{\text{modèle}}}{S_{\text{prototype}}} = r_L^2 \rightarrow \frac{V_{\text{modèle}}}{V_{\text{prototype}}} = r_L^3.$$

➤ **Similitude cinématique :**

Il y a similitude cinématique entre le modèle et le prototype si les rapports des vitesses des

particules homologues du modèle et du prototype sont égaux :

$$\frac{v_{\text{modèle}}}{v_{\text{prototype}}} = \frac{L_m/T_m}{L_p/T_p} = \frac{r_L}{r_T} \text{ constant}.$$

On en déduit la loi de similitude pour le champ :

des accélérations : $\frac{a_{\text{modèle}}}{a_{\text{prototype}}} = \frac{r_L}{r_T^2}$, et pour celui des débits volumiques : $\frac{D_{V \text{ modèle}}}{D_{V \text{ prototype}}} = \frac{r_L^3}{r_T}$.

➤ **Similitude dynamique :**

On a similitude dynamique entre systèmes géométriquement et cinématiquement semblables si les rapports entre toutes les forces homologues sont égaux.

Exemples :

Le rapport $\frac{\text{force d'inertie}}{\text{force visqueuse}}$ définit un nombre (sans dimension bien sûr) appelé ***nombre de Reynolds***, noté \mathcal{R}_E , tel que : $\mathcal{R}_E = \frac{\rho L v}{\eta}$.

Le rapport $\frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de pesanteur}}$ définit le ***nombre de Froude***, ou plutôt ***son carré*** suivant la plupart des auteurs, noté \mathcal{F} tel que : $\mathcal{F} = \frac{v}{\sqrt{L \cdot g}}$.

2°) Écoulement autour d'un obstacle.

➤ **Expression de la résistance exercée par un fluide en mouvement sur un corps :**

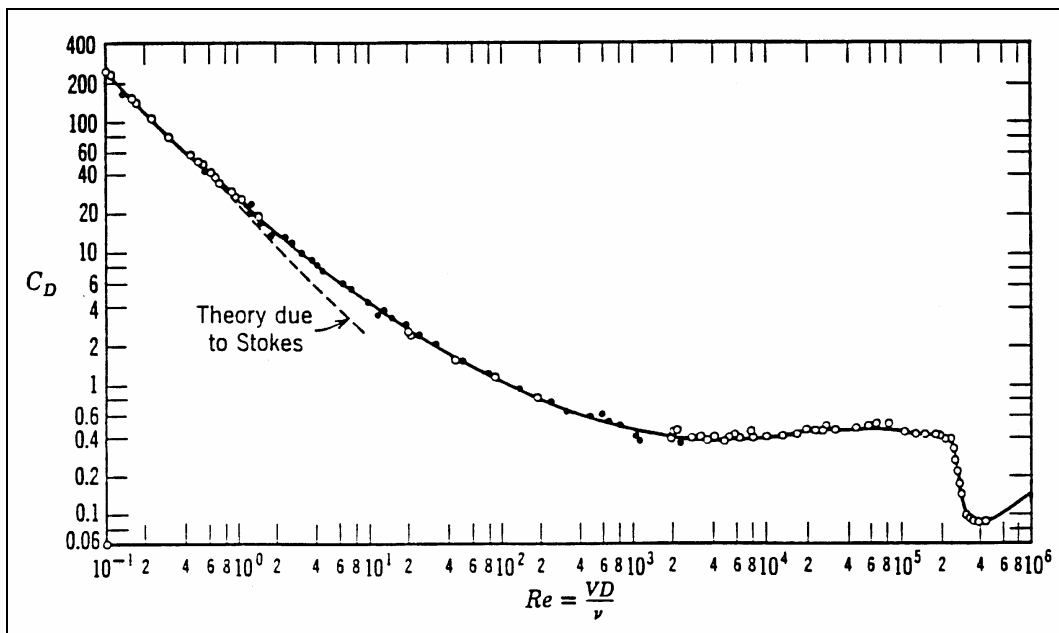
Cette résistance \vec{F} , appelée *traînée*, est la composante parallèle à \vec{v}_∞ de la résultante des forces dues à l'écoulement du fluide. Elle est fonction de la masse volumique ρ du fluide, de sa viscosité dynamique η , de la vitesse v_∞ et d'une longueur caractéristique du corps L .

✎ Montrer à l'aide de l'analyse dimensionnelle que $F \propto \eta \cdot v_\infty \cdot L = \frac{\rho}{\mathcal{R}_E} L^2 v_\infty^2$, en introduisant le nombre de Reynolds \mathcal{R}_E de l'écoulement.

On écrit plus classiquement F en faisant apparaître un coefficient sans dimension appelé coefficient de traînée, noté C_x , et défini tel que : $F = \frac{1}{2} C_x S \rho v_\infty^2$, où S appelé « maître-couple » est l'aire de la surface obtenue en projetant le solide sur un plan perpendiculaire à l'écoulement.

L'approche dimensionnelle montre que pour un obstacle de forme et d'orientation données, le coefficient de traînée C_x ne dépend que du nombre de Reynolds \mathcal{R}_E .

Le graphe ci-dessous donne, en coordonnées logarithmiques, les variations de C (noté C_D) en fonction de \mathcal{R}_E .



➤ **Exploitation du graphe :**

1) Pour $\mathcal{R}_E < 1$, $\ln(C)$ en fonction de $\ln(\mathcal{R}_E)$ est une ***droite de pente égale à -1*** :

✎ Montrer qu'on peut écrire $C = \frac{k}{\mathcal{R}_E}$. Qui conduit à l'expression du type : $F = k \cdot \eta \cdot L \cdot v$.

L'expression $F = k \cdot \eta \cdot L \cdot v$ constitue ***la loi de Stokes***, exprimant que la force de traînée est ***proportionnelle*** à la vitesse du fluide / obstacle.

Par exemple, pour une ***sphère lisse*** de rayon r placée dans un fluide en mouvement par rapport à la sphère à la vitesse v , on a $C_x = \frac{24}{\mathcal{R}_E}$ pour $\mathcal{R}_E < 1$, qui conduit à : $\vec{F} = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot \vec{v}$.

2) Pour $\mathcal{R}_E > 1\ 000$, le graphe est quasiment confondu avec un segment horizontal, donc le coefficient C est ***constant*** (et le plus souvent de l'ordre de grandeur de l'unité).

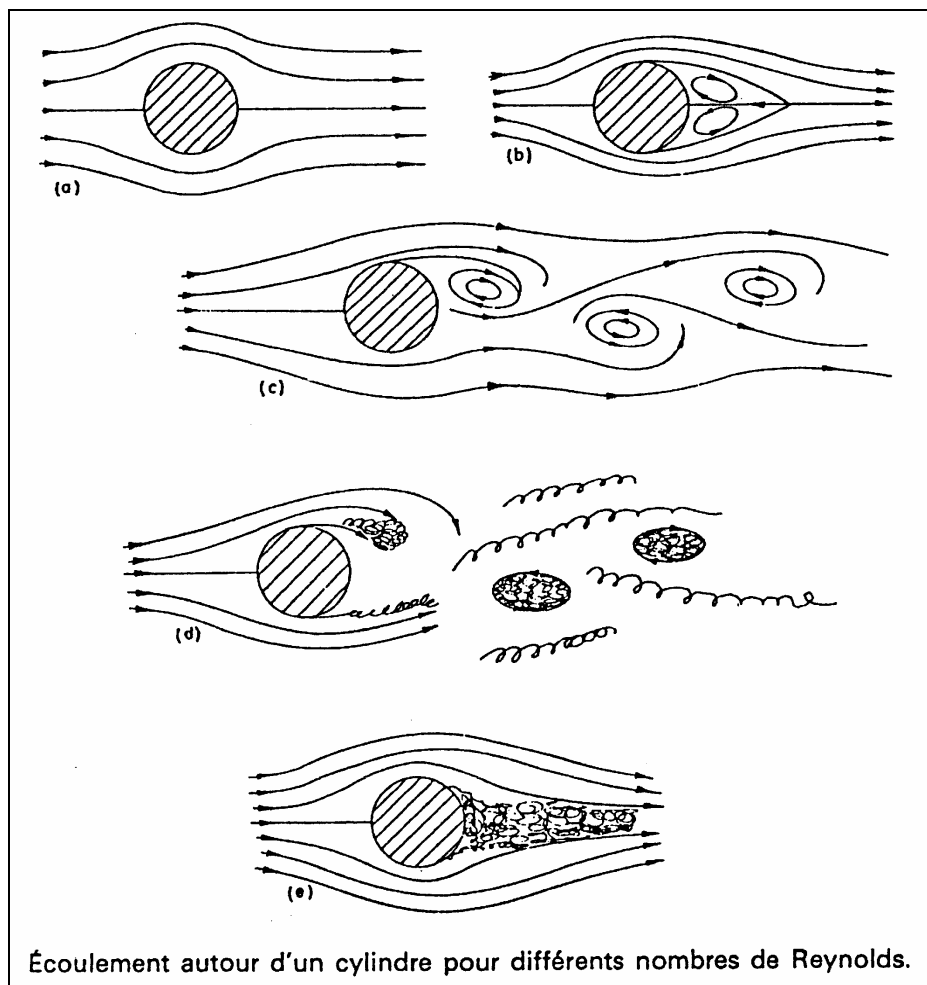
Pour un écoulement à fort nombre de Reynolds ($\mathcal{R}_E > 1\ 000$), la force de traînée exercée par un fluide de masse volumique ρ sur un obstacle est ***quadratique*** en v .

Par exemple, la traînée exercée par un fluide de masse volumique ρ s'écoulant à la vitesse v par rapport une sphère de rayon r est : $F = \frac{1}{2} C \pi \rho r^2 v^2$.

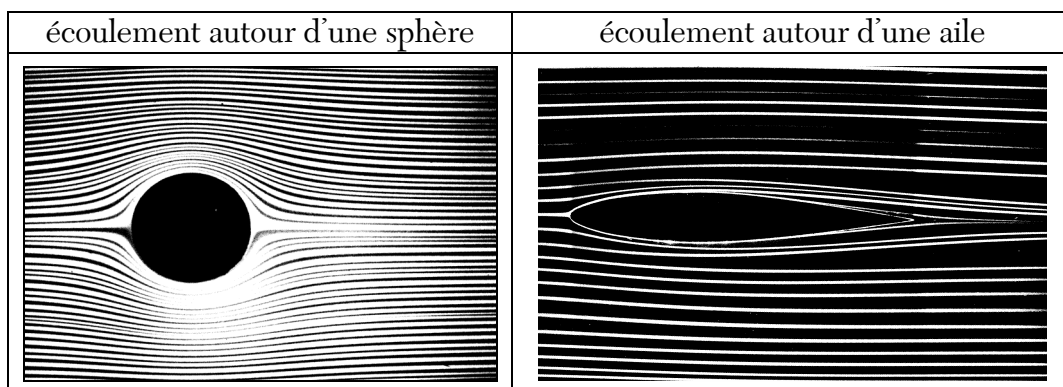
3) Pour $1 < \mathcal{R}_E < 1\,000$, le graphe n'a **aucune forme simple** permettant de dégager une loi simple pour la traînée (situation intermédiaire).

3°) Notion d'écoulement laminaire et d'écoulement turbulent.

Étudions la figure ci-dessous montrant les lignes d'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre immobile pour différents nombres de Reynolds :

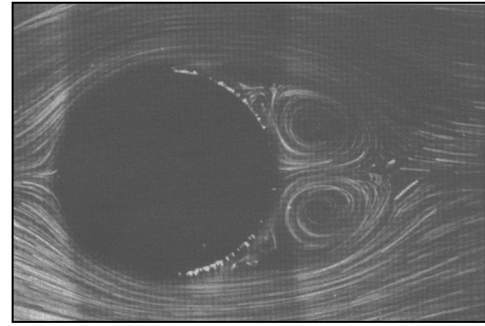


En a) : A bas nombre de Reynolds ($\mathcal{R}_E < 1$), on observe que l'écoulement présente des lignes de courant stationnaires, symétriques par rapport au cylindre : l'écoulement est dit **laminaire**.

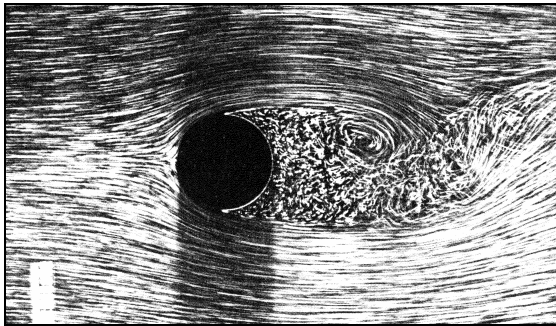
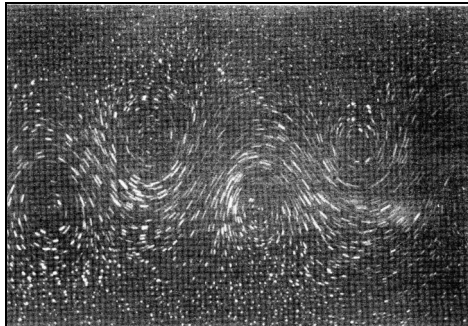


En b) : Pour des valeurs de \mathcal{R}_E supérieures à 1 ($\mathcal{R}_E \approx 20$), il apparaît derrière le cylindre un **sillage** formé d'une paire de **tourbillons stables** (ou rouleaux de fluide).

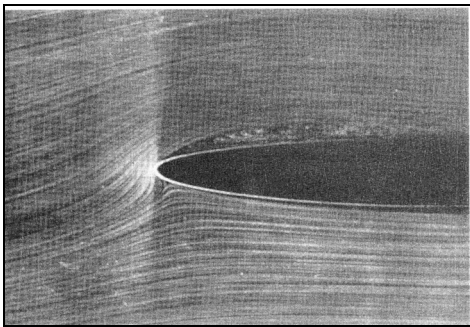
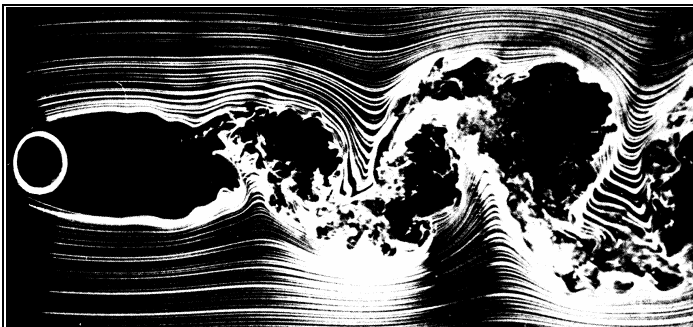
L'écoulement est toujours symétrique par rapport au cylindre mais perd sa symétrie par rapport à l'amont et à l'aval du cylindre. Les dimensions du tourbillon augmentent avec \mathcal{R}_E . Dans le sillage du cylindre, le champ des vitesses subit d'importantes **fluctuations spatiales et temporelles** : on dit que **l'écoulement y est turbulent**.



En c) : Pour $\mathcal{R}_E \approx 100$, des tourbillons se détachent périodiquement du cylindre, alors que d'autres se forment. L'écoulement est périodique, mais les lignes de courant sont encore identifiables : on visualise une **allée tourbillonnaire alternée** dite « **allée de Bénard - Von Karman** ». Ainsi, le plan horizontal, contenant l'axe du cylindre, n'est plus un plan de symétrie pour l'écoulement instantané, mais seulement pour l'écoulement moyenné dans le temps. La complexité de l'écoulement croît avec la vitesse (et donc avec \mathcal{R}_E).

Turbulences derrière un cylindre	Tourbillons alternés (allée de Von Karman)
	

En d) : Pour \mathcal{R}_E compris entre 300 et $5 \cdot 10^5$, le décollement augmente : les tourbillons se détachent du cylindre au-delà d'une zone entourant le cylindre appelée **couche limite** et l'écoulement devient alors turbulent : Dans ces zones turbulentes, le champ de vitesse échappe au déterminisme (on parle de domaine chaotique). Dans de tels régimes d'écoulement, les prédictions deviennent difficiles (ex météorologie) et requièrent une description statistique.

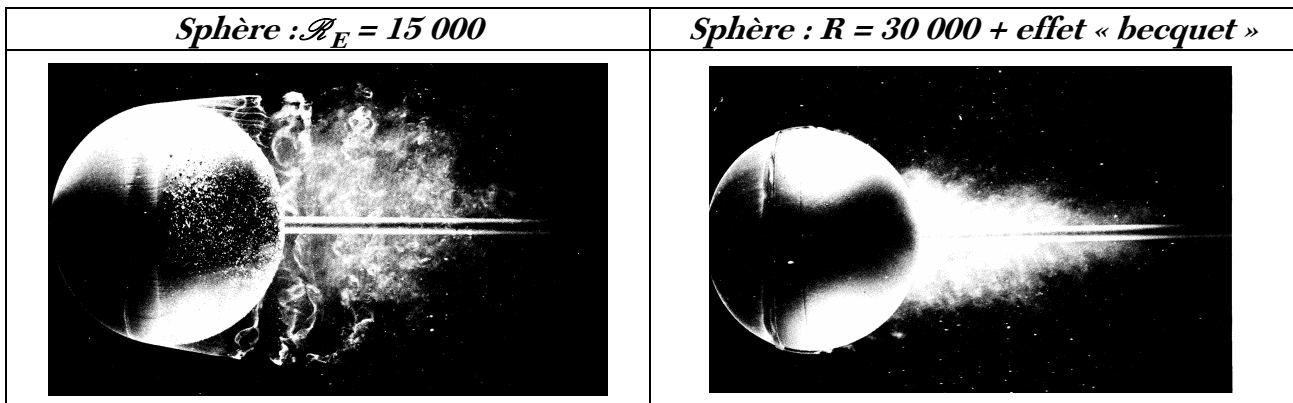
décollement au bord d'attaque d'une aile	écoulement autour d'un cylindre : $\mathcal{R}_E = 10^4$
	

Pour \mathcal{R}_E compris entre $5 \cdot 10^5$ et $5 \cdot 10^6$, le décollement s'effectue maintenant à partir d'une couche limite de nature turbulente, ce qui explique la discontinuité de C_x .

Pour $\mathcal{R}_E > 10^7$, on observe que C_x reste quasiment constant, inférieur à ses valeurs à nombre de Reynolds plus faibles. En pratique, cela signifie que l'existence d'une couche limite turbulente diminue la résistance au mouvement : on constate qu'une couche limite laminaire a tendance à se décrocher d'un profil, alors qu'une couche limite turbulente aura tendance à s'y ac-

crocher : ce résultat explique pourquoi les balles de golf sont bosselées : les turbulences engendrées par les irrégularités de leur surface permettent d'obtenir autour de la sphère une couche limite turbulente.

Il est possible de visualiser ces turbulences en ajoutant sur une sphère lisse un fil mince : on observe un recollement spectaculaire de la couche limite turbulente au profil (effet becquet) :



2°) Rôle du nombre de Reynolds sur les caractéristiques de l'écoulement.

➤ Transition écoulement laminaire – écoulement turbulent :

La différence fondamentale entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent, est qu'un **écoulement turbulent** constitue **une** solution des équations de la dynamique des fluides, mais que **cette solution est instable**, contrairement au cas de l'écoulement laminaire : la moindre perturbation change considérablement la structure d'un écoulement turbulent. Le champ des vitesses devient beaucoup trop compliqué pour qu'on puisse le décrire en détail, et on doit employer des méthodes statistiques.

Faute de mieux, un raisonnement dimensionnel suffit souvent et le **nombre de Reynolds est la grandeur pertinente pour caractériser la perte de stabilité d'un écoulement, et donc la transition laminaire - turbulent**.

Typiquement, un **écoulement laminaire** correspondra aux deux cas suivants :

1. $R_E = \frac{V.L}{\nu} < 1$, lorsque les forces d'inertie sont nulles ou négligeables devant les forces de viscosité, obtenu quand :
 - le fluide est de grande viscosité cinématique,
 - ou si les vitesses d'écoulement sont relativement lentes,
 - ou s'il s'agit du mouvement de corps de dimensions réduites, ou d'écoulements dans des conduites de dimensions relativement faibles
2. $\Delta \vec{v} = \vec{0}$ et R_E quelconque, obtenu dans le cas d'un écoulement potentiel et incompressible d'un fluide visqueux ou parfait.

Remarque : Bien que la solution en écoulement potentiel puisse satisfaire les équations différentielles du mouvement, elle ne peut en général satisfaire les conditions aux limites. En effet, supprimer les termes de viscosité revient à diminuer d'une unité l'ordre des équations aux dérivées partielles, par suite le nombre des constantes d'intégration est réduit d'une unité.

Cela revient à supprimer une condition aux limites du problème original. En effet :

- pour l'écoulement *visqueux*, il y a **adhérence** du fluide à toute paroi solide :
$$\begin{cases} \vec{v}_{//\text{paroi}} = \vec{0} \\ \vec{v}_{\perp\text{paroi}} = \vec{0} \end{cases}$$
- pour l'écoulement *potentiel*, on suppose seulement le **glissement** à la paroi :
$$\vec{v}_{\perp\text{paroi}} = \vec{0}$$
.

Il faut des circonstances exceptionnelles pour qu'un écoulement visqueux soit potentiel (comme par exemple dans le viscosimètre de Couette).

➤ Rôle de la viscosité dans un écoulement turbulent.


La disparition de η dans l'expression de la traînée dans le cas d'un écoulement turbulent (aux grands nombres de Reynolds) pourrait laisser penser que la viscosité est alors sans effet.

Il n'en est rien, car dans le sillage turbulent, les fluctuations spatiales se font sur une très petite échelle spatiale δ .

Cette échelle δ permet de définir un nombre de Reynolds, qu'on qualifie de **local**, par opposition au nombre de Reynolds **global** (associé à l'échelle spatiale L), avec :

$$\mathcal{R}_{E,local} = \frac{\rho v \delta}{\eta} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{E,global} = \frac{\rho v L}{\eta}$$

L'expérience montre qu'il faut avoir $\mathcal{R}_{E,global} \gg 1$ (typiquement $\mathcal{R}_{E,global} \geq 2000$) pour voir apparaître les fluctuations caractéristiques de la turbulence, mais, au sein du sillage, on a $\mathcal{R}_{E,local} \leq 1$.

 En définitive, contrairement aux apparences, la viscosité n'est pas négligeable dans un écoulement turbulent : c'est même elle qui est responsable de la création des tourbillons.

➤ Transition écoulement visqueux – écoulement parfait.

La friction visqueuse, proportionnelle à la vitesse, est paradoxalement négligeable à vitesse élevée, car l'essentiel des variations du champ des vitesses viendra de ses variations spatiales transportées par convection.

Ainsi, dans les écoulements rapides ($\mathcal{R}_E \gg 1$), le fluide se comporte comme si sa viscosité était nulle : on parle alors d'**écoulement parfait** ($\eta \approx 0$).

Attention toutefois : il faut prendre garde au fait que l'écoulement d'un fluide réel aux grandes valeurs de \mathcal{R}_E , avec les phénomènes de turbulence qui s'y produisent, est loin d'être un écoulement de fluide parfait. On peut comprendre de paradoxe (apparent !) en notant que la viscosité intervient dans l'équation de Navier - Stokes dans le terme $\eta \vec{\Delta}(\vec{v})$: ce terme n'est pas partout petit, même si η est faible, car il y a toujours des régions où \vec{v} varie rapidement en fonction des coordonnées (en particulier dans la couche limite, voir plus loin).

Plus précisément, \vec{v} varie d'autant plus vite que η est plus faible, de sorte que le produit $\eta \vec{\Delta}(\vec{v})$ ne tend pas vers zéro !

II : Notions sur la théorie de la couche limite.

1°) Le concept de couche limite.

Les solutions en champ des vitesses et champ de pression des écoulements parfaits sont déterminées par la géométrie des parois limitant l'écoulement et ne dépendent pas de la nature du fluide étudié.

Si on étudie maintenant les fluides réels, donc visqueux, on constate que les solutions proposées par la théorie précédente sont conformes aux données expérimentales quand on considère des zones éloignées des parois, mais dans le voisinage immédiat de celles-ci, elles ne conviennent plus du tout. La raison est que les équations et les conditions aux limites sont différentes.

L'étude expérimentale montre que la vitesse V du fluide augmente de zéro à la paroi (adhérence imposée par les forces d'attraction intermoléculaires) jusqu'à une valeur correspondant à celle de l'écoulement externe sans frottement. **Cette mince zone est appelée couche limite**

Son concept est dû à **Ludwig Prandtl** (théorie de la couche limite établie en 1904).

Dans la couche limite, les contraintes tangentielles sont considérables, même lorsque la viscosité η est faible, car les gradients de vitesse sont importants.

Pour la plupart des cas réels, la couche limite n'est pas de nature homogène au cours de son évolution et, à l'image du comportement d'un fluide dans une conduite, une transition va s'effectuer d'un régime laminaire vers un régime turbulent.

La couche limite n'adhère pas dans tous les cas à la paroi pendant tout le temps de son développement et, à un moment, peut survenir son décollement. Ce phénomène est toujours associé à la formation de gros tourbillons, initiateurs du sillage d'un obstacle par exemple.

En général, la couche limite est très mince aux limites amont d'un obstacle, mais elle augmente d'épaisseur en raison de l'action continue de la contrainte tangentielle visqueuse

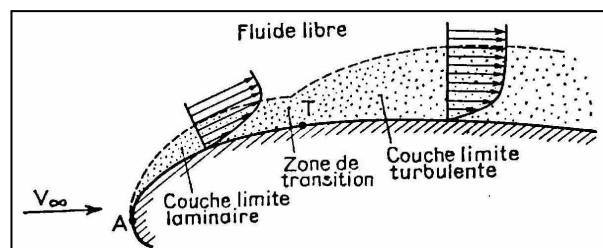
Pour des nombres de Reynolds faibles, la couche limite toute entière est soumise aux forces de viscosité et l'écoulement y est laminaire (écoulement de Poiseuille, de Couette, ou rampants, comme ceux de Stokes, de Hele-Shaw, ou du graissage hydrodynamique).

Pour des valeurs moyennes de \mathcal{R}_E , la couche limite est laminaire près de la surface et turbulente au-delà.

Pour des nombres de Reynolds élevés, la couche limite toute entière est turbulente.

2°) Profil des vitesses dans la couche limite laminaire.

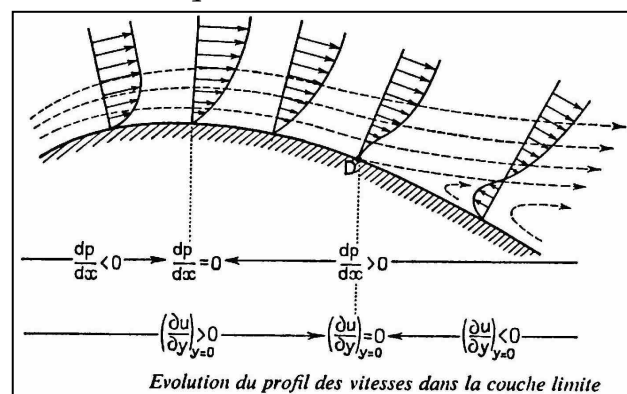
La couche limite se développe le long de l'obstacle à partir du point d'arrêt A. Au voisinage de ce point, l'écoulement dans la couche limite est d'abord laminaire, mais il devient turbulent à partir d'une certaine distance. Le passage s'effectue le long d'une zone critique appelée **zone de transition** d'étendue faible (assimilée à une ligne T).



L'expression du champ de vitesses dans la couche limite dépend du champ de pression, qui est une donnée du problème. En particulier, nous admettrons que dans la couche limite :

- la pression est constante suivant y (perpendiculairement à la paroi) : $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$,
- la variation de pression suivant x (tangente à la paroi) est imposée par l'écoulement non visqueux à l'extérieur de la couche limite.

La figure ci-contre illustre les différents profils qu'on peut observer selon le signe de $\frac{\partial P}{\partial x}$.



3°) Épaisseur de la couche limite sur un profil.

Dans la couche limite, le transport diffusif domine le transport convectif, alors qu'à l'extérieur de la couche limite, c'est l'inverse.

En écrivant qu'au bord de la couche limite (épaisseur δ), les deux termes de l'équation de Navier – Stokes sont du même ordre de grandeur, montrer à l'aide de l'analyse dimensionnelle

que l'on obtient :

$$\frac{\delta}{L} \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}_{E,global}}}$$

➤ **Caractère laminaire ou turbulent de la couche limite.**

L'écoulement dans la couche limite peut être laminaire ou turbulent, indépendamment de l'écoulement extérieur.

✎ Donner l'expression du nombre de Reynolds local $\mathcal{R}_{E,loc}$, défini dans la couche limite.

Compte tenu de l'ordre de grandeur de δ , en déduire que : $\mathcal{R}_{E,loc} \approx \sqrt{\mathcal{R}_{E,global}}$.

Ainsi, la couche limite devient turbulente pour $\mathcal{R}_{E,loc} > 10^3$, soit $\mathcal{R}_{E,global} > 10^6$.

Avantages d'une couche limite turbulente :

La couche limite turbulente se décolle moins facilement et moins brusquement que la couche limite laminaire. Cela s'explique bien si l'on se rappelle que la couche turbulente et le fluide libre (extérieur) échangent des quantités de mouvement d'une façon beaucoup plus vive et importante que la couche laminaire, aussi les particules de fluide voisines de la paroi conservent-elles plus facilement leur énergie cinétique dans la couche turbulente que dans la couche laminaire.

Cette transition laminaire - turbulente est favorable car elle a pour effet de réduire le sillage et donc la traînée, puisque le C_x chute rapidement lors de cette transition.

Cette propriété est mise à profit dans la conception des balles de golf (voir I 3°) : leur surface irrégulière favorise la transition vers une couche limite turbulente, qui diminue la traînée, augmentant par là même la portée des balles.