COMMANDES D'UN SYSTÈME ; FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE BOUCLÉ.

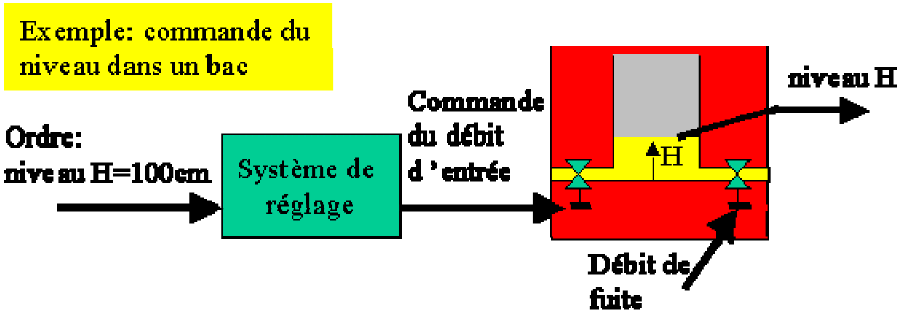
I : Structure d'un système asservi linéaire.

1°) Schéma fonctionnel d'un système bouclé.

Un système est dit bouclé dès lors que l'on prend en compte en permanence l'état réel du système, observé à sa sortie. On adapte alors l'entrée en fonction de la grandeur mesurée. Un capteur donne une image de la sortie que l'on doit comparer à la grandeur de consigne.

➢ **Étude d'un exemple : commande du niveau dans un bac :**

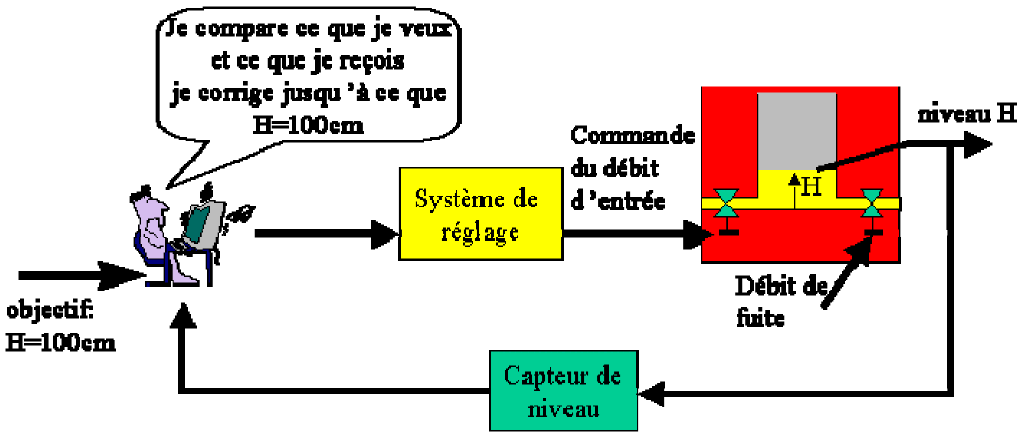
Commande en boucle ouverte:



Ceci est une commande en boucle ouverte qui ne **permet pas de régler précisément le niveau** de sortie et corriger l'effet des perturbations.

Commande en boucle fermée:

Pour régler le niveau il faut agir sur l'organe de réglage (la vanne) en fonction de l'écart entre la valeur désirée et la valeur réelle:



➢ **Éléments constitutifs d'un système bouclé :**

L'exemple précédent permet de dégager quelques éléments généraux communs à tout système bouclé :

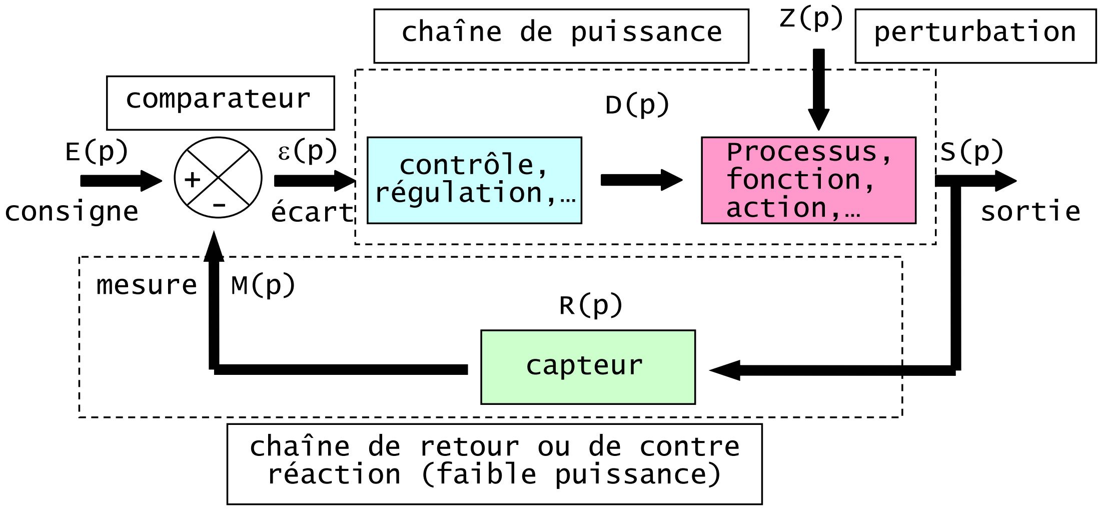
- ***Les capteurs*** : leur rôle est de transformer une grandeur physique quelconque (le mesurande) en une grandeur électrique (charge, tension, courant ou impédance).
- ***Les actionneurs*** : ils constituent la chaîne directe. Ce sont des organes de puissance qui commandent directement les systèmes à asservir ou à réguler.
- ***Les organes de traitement de l'information*** : ces organes, qui travaillent à faible ou moyenne puissance, ont pour rôle de traiter les informations fournies par les capteurs. Il peut s'agir par exemple d'amplificateurs, ou de systèmes prenant en compte une perturbation, …

Un de ces organes se retrouve dans la structure de tout système bouclé :

il s'agit du ***comparateur***, ou soustracteur, qui élabore ***l'écart*** (ou l'***erreur***).

➢ **Structure générale d'un système asservi :**

Un système asservi est un système à **boucle fermée** (closed loop system, followed system) que l'on peut décrire par le **schéma général** suivant :



On note : ***D(p)*** la fonction de transfert de la ***chaîne directe*** (chaîne de puissance contenant amplificateurs et actionneurs, assurant le processus ou la fonction du système),

R(p) la fonction de transfert de la ***chaîne de retour***, ou de rétroaction.

On désigne par : e(t), le signal d'entrée ou ***consigne***, et son image complexe ***E(p),***
ε(t) l'***écart*** ou l'erreur, et son image complexe ***ε(p),***
s(t) le signal de sortie, et son image complexe ***S(p)***,
m(t), le ***signal de mesure*** (en sortie de la chaîne de retour, réinjecté au niveau du comparateur), et son image complexe ***M(p),***

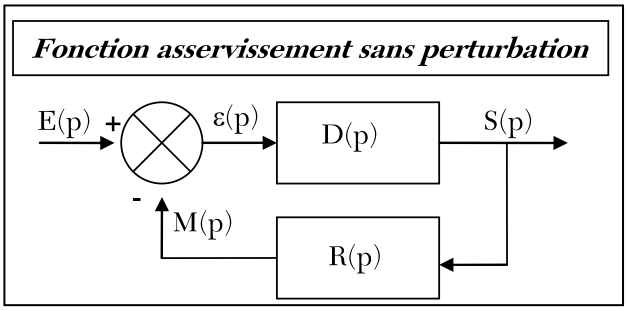
➢ **Schémas fonctionnels d'un système bouclé linéaire.**

Un système bouclé linéaire est un dispositif à chaîne retour ne comprenant que des opérateurs linéaires et invariants dans le temps.

Différent schémas fonctionnels sont envisageables, compte tenu du système bouclé étudié.

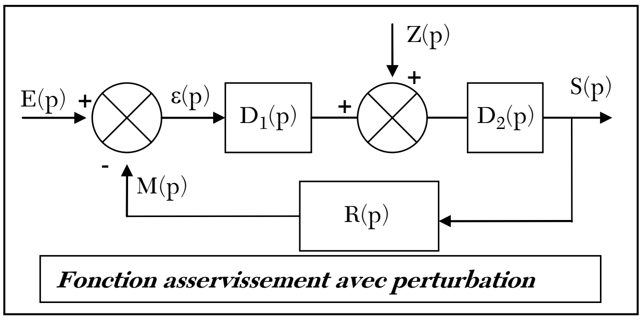
- **Schéma fonctionnel asservissement (sans perturbations) :**

Un système asservi est dit « suiveur » : c'est la consigne qui varie et la sortie (ou grandeur réglée) devra suivre rapidement les variations de la consigne.



- **Schéma fonctionnel asservissement, avec perturbation :**

La présence de défauts dans les composants ou d'influences parasites dues à la présence de systèmes voisins peut se modéliser par l'introduction d'une perturbation dans le schéma fonctionnel d'un système asservi :



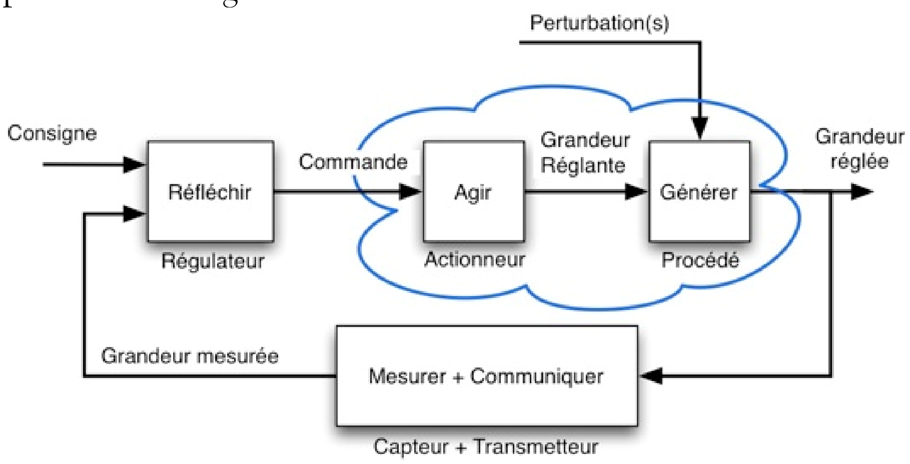
- **Schéma fonctionnel régulation :**

Dans ce cas, la consigne est fixée et on s'attachera à maintenir constante la sortie (grandeur réglée) d'un système soumis à des perturbations.

Pour réguler un système physique, il faut :

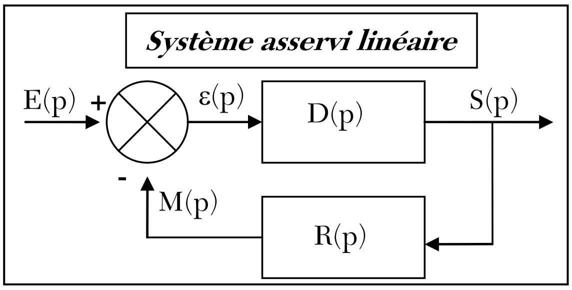
- **Mesurer** la grandeur réglée avec un capteur. **Réfléchir** sur l'attitude à suivre : c'est la fonction du régulateur. Le régulateur compare la grandeur réglée avec la consigne et élabore le signal de commande.
- **Agir** sur la grandeur réglante par l'intermédiaire d'un organe de réglage.

On peut représenter une régulation de la manière suivante :



2°) Fonctions de transfert d'un système bouclé linéaire.

Raisonnons sur le schéma fonctionnel de base ci-contre. En régime harmonique, on peut écrire :



L'écart : $\boxed{\varepsilon(p) = E(p) - M(p)}$,

La sortie : $\boxed{S(p) = D(p).\varepsilon(p)}$,

La mesure (rétroaction) : $\boxed{M(p) = R(p).S(p)}$

Quand la boucle est ouverte, on a : $M(p) = 0$. Alors : $\boxed{S_{BO}(p) = D(p).E(p)}$.

Quand la boucle est fermé, on a : $\boxed{S_{BF}(p) = \dfrac{D(p)}{1 + D(p).R(p)}E(p)}$.

On appelle :

- ***<u>Fonction de transfert de la chaîne directe</u>*** : $\boxed{FT(p) = D(p)}$,

- ***<u>Fonction de transfert en boucle ouverte</u>*** : $\boxed{FTBO(p) = D(p)R(p)}$.

La chaîne directe est une chaîne de puissance.

Usuellement, on a : $\boxed{|D(p)| \gg 1}$, soit $\boxed{|FTBO(p)| \gg 1}$

- ***<u>Fonction de transfert en boucle fermée</u>*** : $\boxed{FTBF(p) = \dfrac{D(p)}{1 + D(p).R(p)}}$

- Taux de « ***<u>contre-réaction</u>*** » : $\boxed{T_{CR}(p) = 1 + D(p)R(p)}$. C'est le rapport : $\boxed{T_{CR}(p) = \dfrac{E(p)}{\varepsilon(p)}}$.

- Un système est dit ***<u>à retour unitaire</u>*** si $\boxed{R(p) = 1}$.

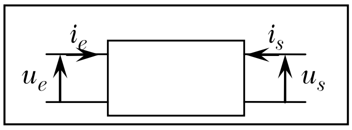
3°) Réalisation pratique de la rétroaction.

- **Principe :**

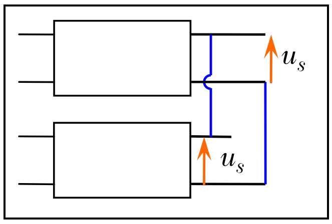
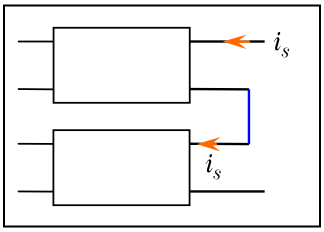
  On prélève la grandeur de sortie.

  On soustrait la grandeur de mesure (ou de retour) à la grandeur d'entrée.

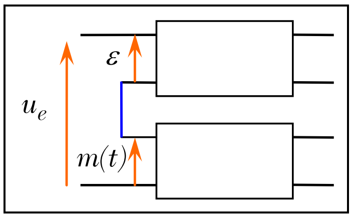
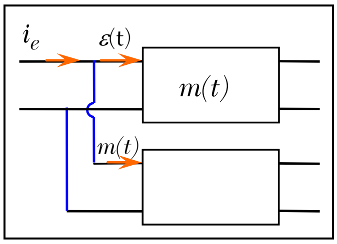
  Les chaînes sont modélisées par des quadripôles, orientés en convention récepteur (cf figure ci-dessus).



- **Prélèvement de la grandeur de sortie (lien avec la chaîne de retour) :**

Prélèvement de ***tension*** : association en ***parallèle.***	
Prélèvement de ***courant*** : association en ***série.***	

- **Prélèvement de la grandeur d'entrée (réalisation du comparateur) :**

Prélèvement de ***tension*** : association en ***série.***	
Prélèvement de ***courant*** : association en ***parallèle.***	

II : Performances dynamiques.

1°) Les avantages de la rétroaction.

- **Sensibilité aux variations du système :**

  Dans le cas d'une chaîne d'action à grand gain : $|D(p)| \gg 1$.

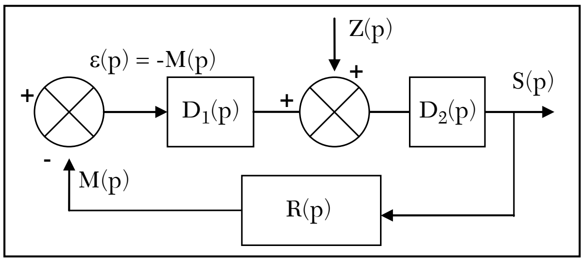
  Or on a $FTBF(p) = \dfrac{D(p)}{1 + D(p).R(p)}$, soit dans ce cas $\boxed{FTBF(p) \approx \dfrac{1}{R(p)}}$.

Le système bouclé se comporte donc comme un système en boucle ouverte dont la fonction de transfert ***ne dépend que des caractéristiques de la chaîne de retour***. Ainsi, les défauts de la chaîne directe (décalages, dérives) sont sans effet sur le système bouclé.

Conclusion :

> La grandeur de sortie d'un système bouclé est peu sensible aux variations de la fonction de transfert de l'actionneur (ou chaîne directe de puissance).
>
> En revanche, elle est très sensible aux variations de la fonction de transfert de la chaîne de retour, qui doit donc être une chaîne de précision.

➢ **Influence d'une perturbation.**



Envisageons le schéma fonctionnel d'un système de régulation, avec une perturbation notée Z(p) et une consigne d'entrée nulle.

En boucle fermée, on a les équations :

$$S_F(p) = D_2(p).[Z(p) + D_1(p).\varepsilon(p)]$$

$$\varepsilon(p) = -M(p) \text{ et } M(p) = R(p).S_F(p).$$

Il vient : $S_F(p) = \dfrac{D_2(p)}{1 + R(p)D_1(p)D_2(p)}Z(p)$.

Dans le cas usuel où $|D_1(p)| \gg 1$ et $|D_2(p)| \gg 1$, $S_F(p)$ s'écrit : $\underline{S_F(p) \approx \dfrac{1}{D_1(p)R(p)}Z(p)}$.

Pour le système en boucle ouverte, la sortie variait avec Z suivant : $\underline{S_0(p) = D_2(p).Z(p)}$.

> Ainsi, la rétroaction atténue considérablement l'effet d'une perturbation externe sur le système bouclé.

➢ **Stabilité du système bouclé.**

On a établi la fonction de transfert d'un système bouclé : $FTBF(p) = \dfrac{D(p)}{1 + D(p).R(p)}$.

D'après les critères de stabilité d'un système linéaire déjà vus, on en déduit :

> Pour qu'un système bouclé soit stable, il est nécessaire que les zéros du taux de contre-réaction $\boxed{T_{CR}(p) = 1 + D(p)R(p)}$ soient à partie réelle strictement négative.

2°) Cas d'un actionneur du 1er ordre et d'une chaîne de retour réelle.

➢ **Aspect fréquentiel.**

On considère une chaîne directe du premier ordre : $\boxed{D(p) = \dfrac{D_0}{1 + \dfrac{p}{\omega_0}}}$, de type passe-bas de bande passante [0 ; ω_0] et d'amplification statique D_0.

La fonction de transfert de la chaîne de retour est supposée réelle et constante : $\boxed{R(p) = R_0}$.

On établit que :

> La fonction de transfert du système bouclé s'écrit $\boxed{FTBF(p) = \dfrac{H_0}{1 + \dfrac{p}{\omega_c}}}$, transmittance caractéristique d'un filtre passe-bas du 1er ordre, d'amplification statique $\boxed{H_0 = \dfrac{D_0}{1 + D_0R_0}}$ et de bande passante [0 ; ω_c], avec $\boxed{\omega_c = (1 + D_0R_0)\omega_0}$.

- **Produit « gain bande » ou facteur de mérite :**

> On appelle « produit gain bande » ou « facteur de mérite », noté F_m d'un système linéaire le produit de son amplification maximale par sa bande passante (en Hertz) : ***pour une chaîne d'action du premier ordre, le facteur de mérite du système bouclé est le même que celui de sa chaîne d'action*** : $\boxed{F_m = D_0 \frac{\omega_0}{2\pi} = H_0 \frac{\omega_c}{2\pi}}$.
>
> ☞ La rétroaction, en diminuant fortement le gain (puisque $H_0 \ll D_0$) permet une ***augmentation importante de la bande passante***.

- **Aspect temporel.**

Les équations différentielles d'une chaîne d'action du premier ordre placé dans un système bouclé sur une chaîne de retour réelle s'écrivent : $\begin{cases} \tau_0 \frac{ds}{dt} + s(t) = D_0 \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) = e(t) - R_0 s(t) \end{cases}$, où $\boxed{\tau_0 = \frac{1}{\omega_0}}$ est la ***constante de temps de l'actionneur***.

Les signaux d'entrée et de sortie sont liés par l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\tau_0}{1+D_0R_0}\frac{ds}{dt} + s(t) = \frac{D_0}{1+D_0R_0}e(t)}, \quad \text{si} \quad \boxed{1+D_0R_0 \neq 0}.$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire du premier ordre fait intervenir la ***nouvelle constante de temps du système bouclé*** : $\boxed{\tau_c = \frac{\tau_0}{1+D_0R_0}}$.

On retient :

> D'un point de vue temporel, la rétroaction permet une ***augmentation importante de la rapidité*** du système.

- **Stabilité.**

> La réponse temporelle montre que le système bouclé est stable si $\boxed{\tau_c = \frac{\tau_0}{1+D_0R_0} > 0}$, ce qui impose en pratique $\boxed{R_0 > 0}$ (car usuellement $\boxed{D_0 \gg 1}$).

3°) Oscillateurs à rétroaction.

- **Principe de l'oscillateur.**

Un oscillateur est un système délivrant un signal périodique en l'absence de grandeur de commande : $S(p) \neq 0, avec\ E(p) = 0$.

Un oscillateur est constitué d'un amplificateur (chaîne directe) en rétroaction. La chaîne de retour est un filtre sélectif qui détermine la fréquence des oscillations.

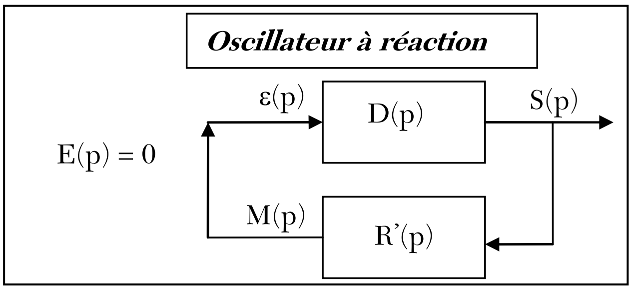
- **Les différents types d'oscillateurs.**

On distingue deux familles d'oscillateurs :

- ***Les oscillateurs quasi sinusoïdaux*** : l'amplificateur est presque toujours en régime linéaire.
- ***Les oscillateurs non sinusoïdaux (ou à relaxation)*** : l'amplificateur est presque toujours en saturation.

➢ Conditions d'oscillations.

Dans un oscillateur à réaction, le comparateur n'a plus guère d'intérêt et on peut réécrire le schéma fonctionnel d'un système asservi sous la forme ci-contre, dans lequel l'association de la chaîne de retour et du comparateur est remplacé par la fonction de transfert : $\boxed{R'(p) = -R(p)}$:



On a alors les équations : $S(p) = D(p).\varepsilon(p)$

$\varepsilon(p) = M(p)$ et $M(p) = R'(p).S(p)$.

Qui conduisent à : $\boxed{[1 - D(p)R'(p)]S(p) = 0}$.

Cette équation admet bien sûr la solution S(p) = 0, prévisible et sans intérêt, mais aussi :

On peut avoir $S(p) \neq 0$, à condition que : $\boxed{1 - D(p)R'(p) = 0}$.

☞ Cette condition suppose que le système soit ***instable*** (car s'il était stable, le régime libre tendrait vers zéro).

Le système étant instable, on a *deux possibilités* :

1. le système évolue vers un état stable dans son domaine non linéaire : on observe alors une saturation permanente sans oscillations.
2. le système évolue vers son domaine non linéaire, sans état stable : il oscille.

Conclusion :

Un système bouclé se comporte en *oscillateur* si :

- l'équation $\boxed{1 = D(p).R'(p)}$ admet des racines à *parties réelles positives*.

- il *n'existe pas d'état stable* dans le domaine de fonctionnement non linéaire.

➢ Oscillations quasi sinusoïdales.

On observe des oscillations sinusoïdales à la pulsation ω_0 sous la condition, ***appelée condition de Barkhausen*** : $\boxed{\underline{D}(j\omega_0).\underline{R}'(j\omega_0) = 1}$.

Cette équation complexe conduit à deux équations réelles :

- $\boxed{arg[\underline{D}(j\omega_0)] + arg[\underline{R}'(j\omega_0)] = 0}$, équation en ω_0 qui fixe la pulsation des oscillations,
- $\boxed{|\underline{D}(j\omega_0)|.|\underline{R}'(j\omega_0)| = 1}$, ω_0 étant déterminé par l'équation précédente donne la condition d'accrochage des oscillations : on obtient ainsi une condition sur le gain de la chaîne directe.

➢ Critère pratique d'oscillation.

La condition limite $|\underline{D}(j\omega_0)|.|\underline{R}'(j\omega_0)| = 1$ ne permet pas ne pratique l'amorçage des oscillations. On aura apparition et entretient des oscillations pour :

- $\boxed{arg[\underline{D}(j\omega_0)] + arg[\underline{R}'(j\omega_0)] = 0}$, qui fixe la pulsation ω_0,
- $\boxed{|\underline{D}(j\omega_0)|.|\underline{R}'(j\omega_0)| \geq 1}$, qui conduit à l'entretien des oscillations.

La non linéarité de l'amplificateur limite l'amplitude des signaux lors de la saturation.

Les oscillations seront quasi sinusoïdales si $\boxed{|\underline{D}(j\omega_0)|.|\underline{R}'(j\omega_0)| \simeq 1}$.

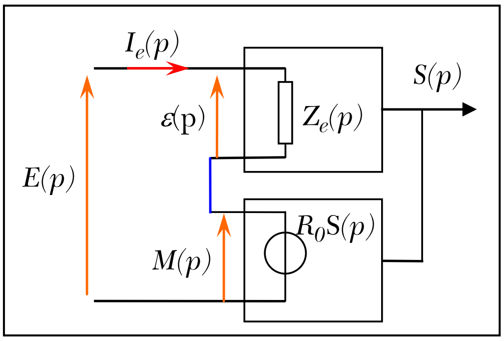
III : Pour en savoir plus.

1°) Effets d'une chaîne de retour réelle sur l'impédance d'entrée d'un système bouclé.

Envisageons le cas d'un comparateur de tension (association en série) (voir figure ci-contre).

On désigne par Z_e l'impédance d'entrée de la chaîne directe, de fonction de transfert D(p).

La fonction de transfert de la chaîne de retour est supposée réelle : $M(p)=R_0S(p)$.



En boucle fermée, on a les équations :

$$E(p)=\varepsilon(p)+M(p) \quad ; \quad M(p)=R_0.S(p)$$
$$\varepsilon(p)=Z_e(p)I_e(p) \quad ; \quad S(p)=D(p).\varepsilon(p)$$

On définit l'impédance d'entrée du système bouclé par : $Z'_e=\dfrac{E(p)}{I_e(p)}$

On obtient : $E(p)=Z_e(p)I_e(p)+R_0D(p)Z_e(p)I_e(p)$.

D'où on tire : $\boxed{Z'_e=Z_e\left[1+R_0D(p)\right]}$.

Conclusion :

L'association en ***série***, en entrée, des chaînes d'action et de retour augmente l'impédance d'entrée du système bouclé : $\boxed{Z'_e=Z_e\left[1+R_0D(p)\right]}$.

De même, on pourrait montrer que :

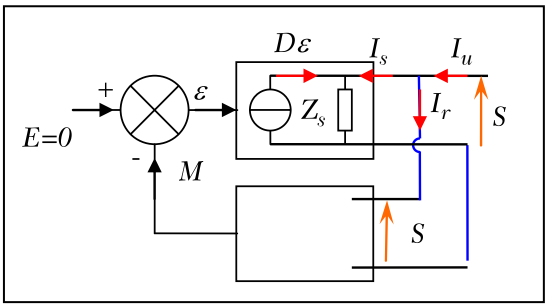
L'association en ***parallèle***, en entrée, des chaînes d'action et de retour diminue l'impédance d'entrée du système bouclé : $\boxed{Z'_e=\dfrac{Z_e}{1+R_0D(p)}}$.

2°) Effets d'une chaîne de retour réelle sur l'impédance de sortie d'un système bouclé.

Envisageons le cas d'une association en parallèle en sortie (voir figure ci-contre).

On désigne par Z_s l'impédance de sortie de la chaîne directe, de fonction de transfert D(p).

La chaîne d'action se comporte comme un générateur de courant, de courant électromoteur égal à D(p)ε(p).



La fonction de transfert de la chaîne de retour est supposée réelle : $M(p)=R_0S(p)$.

On calcule l'impédance de sortie du système bouclé ***pour un signal d'entrée nul*** (E(p) = 0).

En boucle fermée, et pour E = 0, on a les équations :

$$\varepsilon(p)=-M(p) \quad ; \quad M(p)=R_0.S(p) \quad ; \quad S(p)=Z_s(p)\left[I_s(p)+D(p)\varepsilon(p)\right] \; ; \quad I_u=I_s+I_r$$

L'impédance de sortie de la chaîne directe s'écrit : $\boxed{Z_s=\dfrac{S(p)}{I_u(p)}}$.

On définit l'impédance de sortie du système bouclé par : $\boxed{Z'_s = \dfrac{S(p)}{I_u(p)}}$.

☞ On suppose la chaîne de retour *idéale*, c'est-à-dire qu'elle ne perturbe pas le signal de sortie S, ce qui revient à considérer l'impédance d'entrée de la chaîne de retour infinie.

Donc $\boxed{I_r = 0}$.

On obtient : $S(p) = Z_s(p)\left[I_u(p) - R_0 D(p) S(p)\right]$. D'où on tire : $\boxed{Z'_s = \dfrac{Z_s}{1 + R_0 D(p)}}$.

Conclusion :

> L'association en ***parallèle***, en sortie, des chaînes d'action et de retour diminue l'impédance de sortie du système bouclé : $\boxed{Z'_s = \dfrac{Z_s}{1 + R_0 D(p)}}$.

De même, on pourrait montrer que :

> L'association en ***série***, en sortie, des chaînes d'action et de retour augmente l'impédance de sortie du système bouclé : $\boxed{Z'_s = Z_s\left[1 + R_0 D(p)\right]}$.