

# HISTOIRES D'EAU A PETITE ET GRANDE ECHELLE

Le sujet comporte deux parties indépendantes (A et B).

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La plus grande importance sera donnée à la qualité de la rédaction et de la présentation.

– **Données :**

$G$ (constante gravitationnelle)  $\simeq 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

masse du soleil :  $m_S \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$

distance Terre-Soleil :  $d_S \simeq 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$

masse de la Lune :  $m_L \simeq 7,34 \times 10^{22} \text{ kg}$

distance Terre-Lune :  $d_L \simeq 3,84 \times 10^8 \text{ m}$

rayon moyen de la Lune :  $r_L \simeq 1,75 \times 10^6 \text{ m}$

masse de Jupiter :  $m_J \simeq 1,91 \times 10^{27} \text{ kg}$

rayon moyen de Jupiter :  $r_J \simeq 7,14 \times 10^7 \text{ m}$

masse de la Terre :  $m_T \simeq 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$

rayon moyen de la Terre :  $r_T \simeq 6,37 \times 10^6 \text{ m}$

– **Volume d'un ellipsoïde de demi-grand axe a et de demi-petit axe b :**  $\frac{4}{3}\pi ab^2$

– **Formulaire d'analyse vectorielle :**

$f$ ,  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  étant des champs aux dérivées partielles bornées dans un ouvert incluant  $\mathcal{V}$  (volume de l'espace limité par la surface fermée  $\mathcal{S}$  orientée vers l'extérieur) :

– *Formule du gradient :*

$$\iint_{\mathcal{S}} f \vec{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} (\overrightarrow{\text{grad}} f) d\tau$$

– *Formule du rotationnel :*

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{A} \wedge \vec{dS} = - \iiint_{\mathcal{V}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) d\tau$$

# PARTIE A : EFFETS DE MAREE

## 1 Dynamique newtonienne du point matériel en référentiel géocentrique ; mise en évidence des effets gravitationnels différentiels

### 1.1 Référentiels

#### 1. Référentiel galiléen

- (a) Caractériser les référentiels galiléens en mécanique newtonienne.
- (b) Quel est le "meilleur" référentiel galiléen connu ?
- (c) De quel(s) moyen(s) dispose t-on pour le vérifier ?

#### 2. Référentiel barycentrique

- (a) Définir le référentiel barycentrique (noté  $R^*$ ) d'un système matériel quelconque.
- (b) Un tel référentiel est-il en général galiléen ? Justifier votre réponse.

*Dans toute la suite du problème, le référentiel barycentrique (noté  $R_A^*$ ) d'un astre  $A$  sera appelé référentiel astrocentrique (géocentrique  $R_T^*$  pour la Terre de centre de masse  $T$ , sélénocentrique  $R_L^*$  pour la Lune de centre de masse  $L$ ...).*

### 1.2 Dynamique newtonienne du point matériel en référentiel géocentrique

1. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique pour une particule matérielle ponctuelle  $P$  de masse  $m$ , dans son mouvement par rapport au référentiel géocentrique  $R_T^*$ .

*On utilisera les notations suivantes :*

- $\vec{a}(M/R)$  désigne l'accélération d'un point  $M$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $R$ .
- $\vec{F}$  désigne la résultante des forces "véritables" (i.e traduisant des interactions) autres que gravitationnelles s'exerçant sur la particule considérée.
- $\vec{h}(M)$  désigne le champ gravitationnel régnant au point  $M$ .
- $R_g$  désigne un référentiel galiléen.

*Dans toute la suite de cette section 1,*

- on supposera que dans la région de l'espace considérée, les seuls astres contribuant au champ gravitationnel sont la Terre de masse  $m_T$ , le Soleil de masse  $m_S$  et la Lune de masse  $m_L$ .
- $\vec{h}_T(M)$  (respectivement  $\vec{h}_S(M)$ ,  $\vec{h}_L(M)$ ) désignera le champ gravitationnel créé en  $M$  par la Terre (respectivement le Soleil, la Lune).
- On supposera en outre que les seules forces véritables s'exerçant sur les astres sont d'origine gravitationnelle.

2. Montrer que ces hypothèses permettent d'écrire la relation fondamentale de la dynamique pour une particule ponctuelle  $P$  de masse  $m$ , dans son mouvement par rapport au référentiel géocentrique  $R_T^*$ , sous la forme suivante :

$$m \vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m \vec{h}_T(P) + m \vec{h}_S(P) + m \vec{h}_L(P) - \frac{m}{m_T} \iiint_{M \in \text{Terre}} [\vec{h}_S(M) + \vec{h}_L(M)] dm(M) \quad (1)$$

*Dans toute la suite du problème,*

- les distances  $TS$  et  $TL$  sont notées  $d_S$  et  $d_L$ ,
- le Soleil et la Lune sont des astres supposés posséder la symétrie matérielle sphérique.
- $R_T$ , d'origine  $T$  et de base orthonormée directe  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , est un référentiel terrestre, donc lié à la Terre supposée homogène ;  $Tz$  est axe de symétrie de révolution (axe des pôles orienté vers le pôle Nord) tandis que  $Txy$  est plan de symétrie (plan de l'équateur).

3. Montrer que :

$$\iiint_{M \in \text{Terre}} [\vec{h}_S(M) + \vec{h}_L(M)] dm(M) = m_T [\vec{h}_S(T) + \vec{h}_L(T)] \quad (2)$$

à des termes du second ordre près en  $r_T/d_S$  et  $r_T/d_L$  où  $r_T$  est le rayon moyen de la terre, et que dans l'hypothèse d'une Terre sphérique, ce résultat est acquis à des termes d'ordre supérieur ou égal à trois près. Si besoin est, les coordonnées dans  $R_T$  d'un point courant  $M$  seront notées  $(x, y, z)$  tandis que celles de  $S$  et de  $L$  seront notées  $(x_S, y_S, z_S)$  et  $(x_L, y_L, z_L)$ .

4. Lorsque l'on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en  $r_T/d_S$  et  $r_T/d_L$ , montrer que la relation (1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$m \vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m \vec{h}_T(P) + m \vec{C}_S(P) + m \vec{C}_L(P) \quad (3)$$

où les termes  $\vec{C}_S(P)$  et  $\vec{C}_L(P)$  appelés "champs de marée" caractérisent les effets gravitationnels différentiels produits par le Soleil et la Lune dans  $R_T^*$ ; on exprimera ces champs de marée en fonction de  $\vec{h}_S(P), \vec{h}_L(P), \vec{h}_S(T)$  et  $\vec{h}_L(T)$ .

5. Pour des particules telles que  $TP = r \ll d_S$  et  $d_L$ , lorsque l'on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en  $\frac{r}{d_S}$  et  $\frac{r}{d_L}$ , montrer que :

$$\vec{C}_S(P) = \frac{Gm_S}{(TS)^3} \left( 3 \frac{(\vec{TP} \cdot \vec{TS}) \vec{TS}}{(TS)^2} - \vec{TP} \right) \quad (4)$$

$\vec{C}_L(P)$  s'obtenant par une expression analogue.

6. Dans le plan défini par les points  $P, T$  et  $S$  (respectivement  $P, T$  et  $L$ ), le point  $P$  est repéré (cf. FIG. 1) par ses coordonnées polaires  $(r, \theta_S)$  (respectivement  $(r, \theta_L)$ ) de pôle  $T$ .

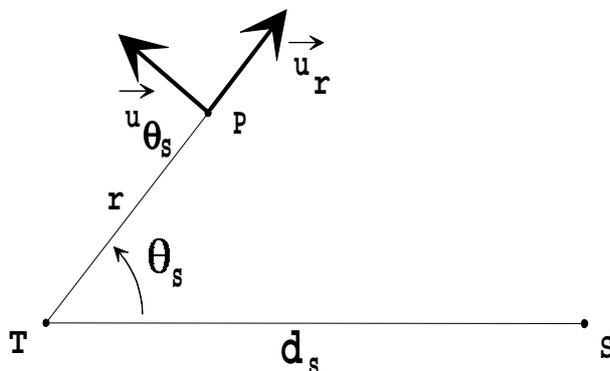


FIG 1 : Repérage du point P par rapport à T et S

- (a) Exprimer les composantes de  $\vec{C}_S(P)$  dans la base locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta_S})$ , celles de  $\vec{C}_L(P)$  dans la base locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta_L})$  s'obtenant par une expression analogue.
  - (b) Montrer que  $\vec{C}_S(P)$  (respectivement  $\vec{C}_L(P)$ ) dérive d'un potentiel de marée solaire  $V_S(P)$  (respectivement potentiel de marée lunaire  $V_L(P)$ ) dont on donnera l'expression en fonction de  $G, m_S, d_S, r$  et  $\theta_S$  (respectivement  $G, m_L, d_L, r$  et  $\theta_L$ ).
7. Représenter sommairement la carte du champ de marée  $\vec{C}_S$  créé par le Soleil à la surface de la Terre dans un plan méridien contenant l'axe  $TS$  et caractériser qualitativement l'effet produit sur la matière plongée dans ce champ.
  8. En déduire que dans le voisinage de la Terre (par exemple dans une sphère de centre  $T$  et de rayon égal à 10 fois le rayon terrestre moyen  $r_T$ ), le référentiel géocentrique se comporte comme un excellent référentiel galiléen à une condition que l'on précisera. On pourra estimer numériquement les champs de marée en quelques points remarquables.

## 2 Quelques effets gravitationnels différentiels

### 2.1 Pourquoi la Lune n'est-elle pas capturée par le soleil ?

1. Comparer les intensités des forces gravitationnelles  $\overrightarrow{F_{TL}}$  et  $\overrightarrow{F_{SL}}$  exercées respectivement par la Terre et le Soleil sur la Lune. Pourquoi la Lune n'est-elle pas capturée par le Soleil ?
2. En faisant des approximations légitimes, exprimer en fonction de  $d_S, m_T, m_S$  la distance Terre-Lune  $d_L$  maximale au delà de laquelle la Lune échapperait à la satellisation terrestre. Calculer numériquement cette distance critique et conclure.

### 2.2 Fragmentation de la comète Shoemaker-Levy 9

Entre le 16 et le 22 juillet 1994, des morceaux de l'objet céleste découvert par Eugène et Carolyn Shoemaker ainsi que David Levy et baptisé "comète Shoemaker-Levy 9" entrèrent en collision avec la planète Jupiter. Il s'agissait de la première collision entre des corps de cette importance jamais observée au sein du système solaire ; les effets des impacts avec l'atmosphère de Jupiter furent tout simplement spectaculaires de l'avis des astronomes du monde entier qui assistèrent à l'évènement.

La comète Shoemaker-Levy 9 consistait en 21 fragments discernables de diamètres estimés entre un et trois kilomètres.

Les observations et les calculs ont montré que ces fragments provenaient de l'explosion de la comète en juillet 92 sous l'effet des forces de marée provoquées par Jupiter ; un modèle simple permet d'estimer la taille maximale des morceaux issus de cette fragmentation.

Jupiter est une planète supposée sphérique homogène de centre  $J$ , de rayon  $r_J$ , de masse  $m_J$ , et de masse volumique  $\mu_J$ .

1. Dans le voisinage de Jupiter, le référentiel jupiterocentrique est supposé galiléen à condition de ne considérer que la seule action de Jupiter comme force d'origine gravitationnelle ; justifier cette hypothèse.
2. On modélise la comète par deux sphères homogènes identiques accolées de masse  $m$ , de rayon  $r$  et de masse volumique  $\mu_C$ , liées entre elles par leur seule attraction gravitationnelle mutuelle, en orbite circulaire de rayon  $d \gg r$  autour de Jupiter ; les centres de masse  $C_1$  et  $C_2$  des deux sphères sont supposés constamment alignés avec  $J$ .
  - (a) En faisant des approximations légitimes, exprimer en fonction de  $r_J, \mu_J, \mu_C$  la distance minimale  $d_{\min}$  en deçà de laquelle les deux morceaux de la comète se séparent (limite de Roche).
  - (b) La comète est constituée essentiellement d'eau glacée ; calculer numériquement  $\frac{d_{\min}}{r_J}$  avec  $\mu_C = 0,91 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  (cas de la glace I).
3. Les observations ont montré que la fragmentation de la comète s'est produite lorsque celle-ci s'est approchée à une distance  $d_0 \simeq 1,58 \times r_J$  du centre  $J$  de Jupiter ; cela peut s'interpréter en admettant qu'en plus de leur attraction gravitationnelle mutuelle, les deux morceaux sont liés par des forces de cohésion à courte portée proportionnelles à la surface de contact entre les deux morceaux. Dans le cas de la glace, on peut estimer la force de cohésion à courte portée  $P_{coh}$  par unité de surface en constatant que la longueur maximale des stalactites de glace est de 3 m sur Terre.  
Calculer numériquement  $P_{coh}$  en considérant le cas d'une stalactite cylindrique de glace.
4. Dans le cas de la comète, on considère le modèle des deux sphères de rayon  $r$  pour le calcul de l'attraction gravitationnelle tandis que pour calculer les forces de cohésion à courte portée on considère que les deux morceaux de masse  $m$  sont deux demi-sphères accolées de rayon  $r'$ .
  - (a) Ecrire la relation entre  $r$  et  $r'$ .
  - (b) Dans le cadre de cette modélisation, exprimer la taille  $r$  des morceaux issus de la fragmentation en fonction de  $P_{coh}, \mu_C, G$  et  $\alpha = \left( \left( \frac{d_{\min}}{d_0} \right)^3 - 1 \right)$ .
  - (c) Calculer numériquement  $r$  dans le cas de la glace I. Que pensez-vous de ce modèle ?
5. Des éléments semblent indiquer qu'une comète ressemble davantage à une boule de neige faiblement compactée qu'à un rocher de glace. Le modèle de boule de neige peu compacte ( $P_{coh} = 10^2 \text{ N m}^{-2}$  et  $\mu_C = 0,5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ) est-il validé par la taille observée des fragments ?

## 2.3 Marées océaniques

Expliquer brièvement :

1. l'existence des marées océaniques.
2. le nombre de marées océaniques prévues quotidiennement en un lieu donné par le seul effet de la Lune.
3. le décalage des heures de marée haute lunaire pour deux jours consécutifs en un lieu donné. Calculer la période de la marée moyenne i.e la durée moyenne entre deux marées hautes consécutives sachant que la lunaison (durée au bout de laquelle les points  $L, T$  et  $S$  retrouvent la même configuration relative) est de 29 jours solaires 12 heures 44 minutes. On supposera que la Lune orbite autour de la Terre à une vitesse angulaire constante et dans le même sens que celui de la rotation propre de la Terre.
4. le lien entre les phases de la Lune (pleine Lune, nouvelle Lune, premier quartier, dernier quartier) et les marées océaniques d'amplitude maximale (vive-eau) et minimale (morte-eau).
5. les fluctuations de 0,012 %, avec les périodicités des marées océaniques, de l'énergie du faisceau de particules du collisionneur LEP du CERN à Genève.

## 3 Amplitude et périodicité des marées océaniques statiques

On considère un modèle quasi-statique simple : la Terre à symétrie matérielle sphérique est entièrement couverte d'eau supposée incompressible (masse volumique  $\mu$  constante) en équilibre hydrostatique dans le référentiel terrestre  $R_T$  défini plus haut (question 2 de la sous-section 1.2).

Par rapport au référentiel géocentrique  $R_T^*$ ,  $R_T$  est en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles  $Tz$  à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}_T = \Omega_T \vec{z}$  ( $\Omega_T > 0$ ).

On suppose que dans la région de l'espace considérée, les seuls astres contribuant au champ gravitationnel sont la Terre, la Lune et le Soleil.

### 3.1 Equation de la surface libre des océans.

1. Le jour solaire (24 heures) est la durée séparant deux passages consécutifs du Soleil au méridien d'un lieu donné. Sachant que la Terre effectue un tour sur son orbite autour du Soleil en 365,25 jours solaires dans le même sens que la rotation propre de la Terre autour de l'axe des pôles, calculer la durée du jour sidéral (période de la rotation propre de la Terre par rapport à  $R_T^*$ ); en déduire la valeur de  $\Omega_T$ .
2. Montrer que l'on peut définir une densité volumique de forces équivalente (en termes de résultante et de moment résultant) aux forces surfaciques de pression régnant dans un fluide. Donner l'expression de cette densité.
3. Utiliser l'équation (3) pour écrire l'équation fondamentale locale de l'hydrostatique traduisant l'équilibre de l'eau dans  $R_T$  en un point  $M$  de latitude  $\lambda$  (cf. figure 2) et situé à une distance  $r$  de  $T$ .

(a) Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{grad}_M \left( \frac{P}{\mu} + V \right) = \vec{0} \quad (5)$$

où  $V = V_T + V_L + V_S + V_I$  est une énergie potentielle massique; dans cette expression :

- $V_T$  est la contribution à  $V$  des effets gravitationnels créés par la Terre.
- $V_L$  et  $V_S$  sont les contributions à  $V$  des potentiels de marée créés par la Lune et le Soleil, définis et calculés à la question 6 de la sous-section 1.2.
- $V_I$  est la contribution à  $V$  des effets d'inertie de la rotation propre de la Terre.

(b) Exprimer  $V_T$  et  $V_I$  en fonction de  $G, m_T, \Omega_T, r$  et  $\lambda$ .

4. En supposant la pression atmosphérique uniforme et en négligeant les phénomènes de tension superficielle, montrer que la surface libre de l'océan est une surface équipotentielle ( $V = \text{constante}$ ).

### 3.2 Amplitude à l'équateur des composantes de marée statique générées par la "Lune moyenne" et le "Soleil moyen"

- (a) Dans le cadre du modèle quasi-statique défini ci-dessus et en faisant des approximations légitimes, exprimer la différence  $\Delta h_I$  de profondeur moyenne des océans aux pôles et à l'équateur due aux seuls effets d'inertie de la rotation propre de la Terre, en fonction de  $G, m_T, \Omega_T$  et  $r_T$ ; calculer numériquement  $\Delta h_I$ ; que pensez-vous de ce résultat ?  
 (b) L'aplatissement relatif de la Terre est 0,0034. Qu'en pensez-vous ?
- Exprimer les contributions  $h_L$  et  $h_S$  de la Lune et du Soleil à la variation du niveau de l'océan provoquée par les seuls effets de marée statique, en fonction de  $r_T, d_L, d_S, m_T, m_L, m_S, \theta_L$  et  $\theta_S$ . En déduire les expressions  $\Delta h_{L \max}$  et  $\Delta h_{S \max}$  des contributions de la "Lune moyenne" et du "Soleil moyen" au marnage (variation de hauteur d'eau entre une basse mer et une pleine mer consécutives) observé à l'équateur. La "Lune moyenne" (resp. le "Soleil moyen") est un astre fictif animé d'un mouvement uniforme sur une orbite circulaire située dans le plan de l'équateur et ayant la même période de révolution que la Lune réelle (resp. le Soleil réel). Calculer numériquement  $\Delta h_{L \max}$  et  $\Delta h_{S \max}$ .

### 3.3 La marée statique en fonction de la latitude et des déclinaisons de la Lune et du Soleil

Un point  $M$  lié à la Terre est repéré par sa latitude  $\lambda$  (définissant le parallèle du lieu considéré) et sa longitude  $\varphi$  (caractérisant le méridien du lieu considéré); le centre  $L$  de la Lune est repéré par sa longitude  $\varphi_L$  et sa latitude appelée "déclinaison" et notée  $\delta_L$ ; le centre  $S$  du Soleil est repéré par sa longitude  $\varphi_S$  et sa déclinaison  $\delta_S$  (cf. figure 2). En raison des mouvements apparents de la Lune et du Soleil autour de la Terre, les angles  $\delta_L, \varphi_L, \delta_S$  et  $\varphi_S$  varient au cours du temps.

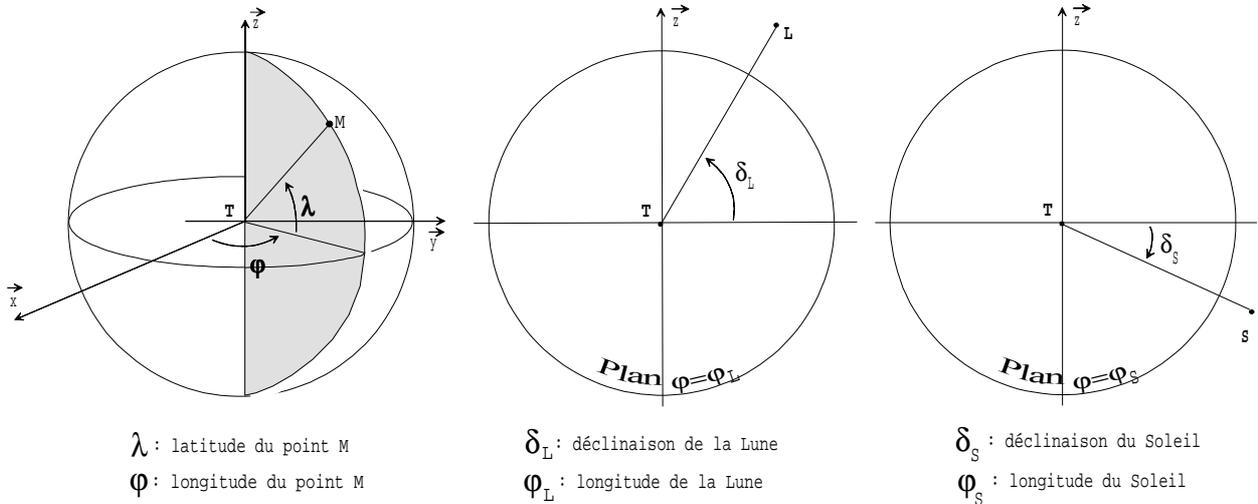


FIG. 2 : Repérage des points M, L et S

- Exprimer la variation  $h$  du niveau de la mer provoquée par les seuls effets de marée statique en un point de la Terre de latitude  $\lambda$  en fonction de  $\Delta h_{L \max}, \Delta h_{S \max}$  (définis à la question 2 de la sous-section 3.2),  $\lambda, \delta_L, \delta_S$ , et des "angles horaires"  $\varphi_{LM} = \varphi_L - \varphi$  et  $\varphi_{SM} = \varphi_S - \varphi$ . On mettra  $h$  sous la forme :

$$h = \left( \begin{array}{l} \Delta h_{L \max} [k_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_L) + k_2 (\sin 2\delta_L \cos \varphi_{LM}) + k_3 (\cos^2 \delta_L \cos 2\varphi_{LM})] + \dots \\ \Delta h_{S \max} [k_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_S) + k_2 (\sin 2\delta_S \cos \varphi_{SM}) + k_3 (\cos^2 \delta_S \cos 2\varphi_{SM})] \end{array} \right) \quad (6)$$

et on donnera les expressions de  $k_1, k_2$  et  $k_3$  en fonction de  $\lambda$ .

- Analyse de l'équation (6) :

- Décrire sommairement les différentes périodicités de la marée en un lieu donné; on mettra en évidence une large gamme d'échelles de temps en distinguant les effets à courte période et à longue période; on rappelle que le plan équatorial fait un angle d'environ  $23^\circ$  avec le plan de l'orbite apparente du Soleil (plan de l'écliptique), ce dernier faisant un angle d'environ  $5^\circ$  avec le plan de l'orbite apparente de la Lune.

- (b) La marée est plutôt de type semi-diurne sur les côtes françaises excepté en Méditerranée; expliquer pourquoi l'amplitude de marée y est modulée avec une périodicité semi-mensuelle, elle-même modulée avec une périodicité semi-annuelle avec un maximum d'amplitude aux équinoxes.
- (c) Si vous avez manqué la dernière grande marée du siècle du 10 mars 1997 (coefficient 119), il vous faudra attendre le 21 mars 2015 pour retrouver un tel coefficient; quelle est la configuration astrale à ces dates particulières? Le Saros (environ 18 ans), appelé aussi période chaldéenne, est la période au bout de laquelle les éclipses se reproduisent dans le même ordre, les marées effectuant leur retour dans des conditions similaires; le phénomène est-il rigoureusement périodique?

## 4 Mise en défaut du modèle statique de marée

En réalité, on observe une très grande diversité des aspects des marées parfois très éloignés des prévisions du modèle statique développé plus haut.

\* On constate (cf. figure 3) qu'à certains endroits, la marée est accrochée sur une période particulière et ceci indépendamment de la latitude; on distingue :

- les marées présentant un caractère marqué semi-diurne (deux pleines mers et deux basses mers d'importances sensiblement égales par jour); ce type de marée est prépondérant en Atlantique
- les marées présentant un caractère marqué diurne (une pleine mer et une basse mer par jour)

Ailleurs, les cas intermédiaires où l'on observe l'influence de composantes de différentes périodicités :

- les marées de type semi-diurne à inégalité diurne (deux pleines mers et deux basses mers par jour mais les hauteurs des pleines mers ou des basses mers consécutives peuvent être très différentes)
- les marées de type mixte (il y a tantôt deux pleines mers et deux basses mers par jour lorsque la déclinaison de la Lune est nulle et tantôt une pleine mer et une basse mer par jour lorsque la déclinaison de la Lune est maximale).

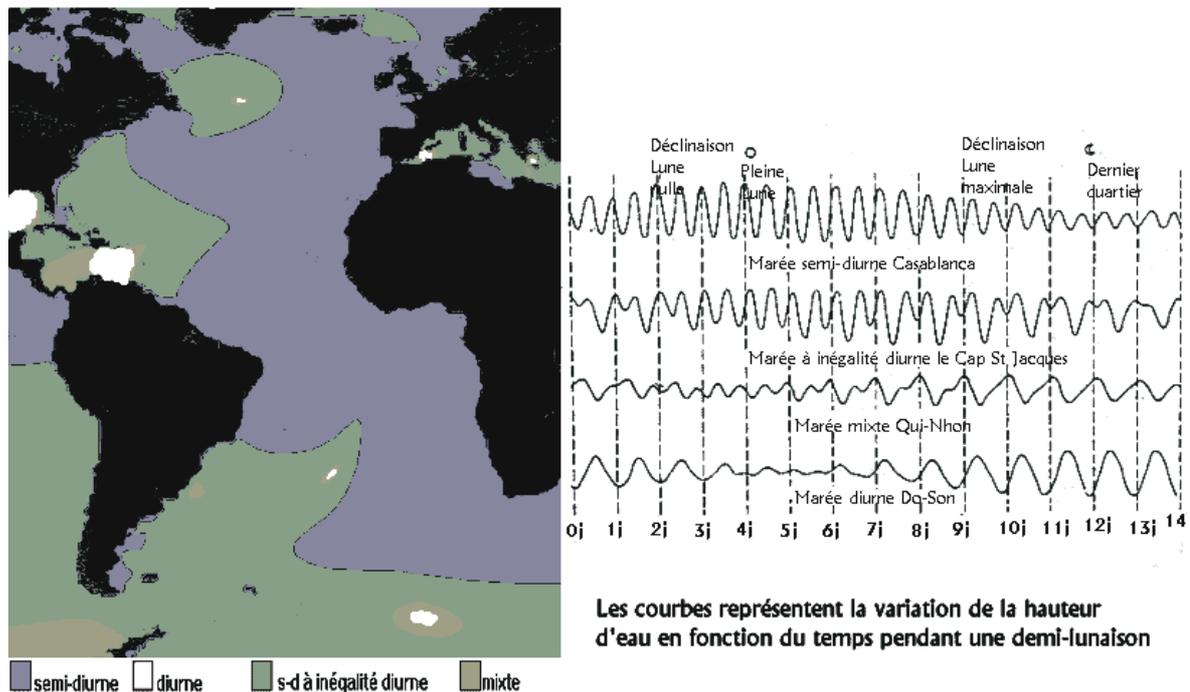


FIG. 3 : Les différents types de marée

\* Les lignes cotidiales représentées en pointillés sur la figure 4 montrent la progression de la pleine mer, d'heure en heure, d'Ouest en Est dans la Manche. On remarque que la pleine mer ne suit pas régulièrement le méridien de la Lune mais tourne dans le sens inverse des lignes d'une montre autour de points appelés points amphidromiques où l'amplitude de marée est nulle. Ainsi, en Manche occidentale, les localités françaises et anglaises situées de part et d'autre de la Manche sur le même méridien ont leurs pleines mers quasi simultanément. Par contre en Mer du Nord, les localités anglaises ont leurs pleines mers en moyenne 7 heures plus tard que les localités hollandaises se trouvant en face.

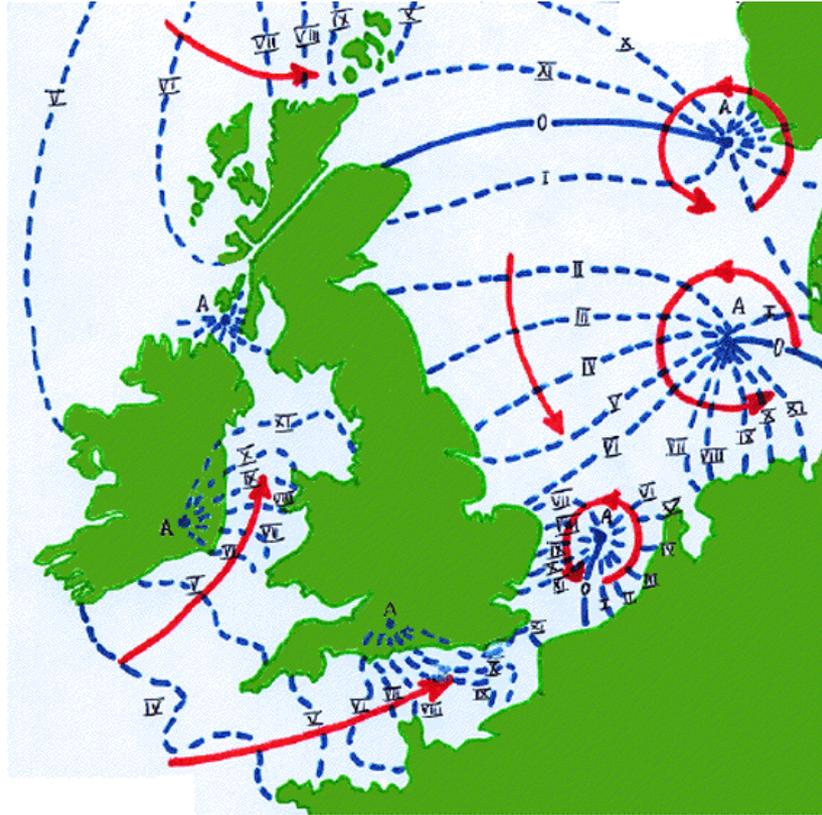


FIG. 4 : Trajet de la pleine mer en Manche et en Mer du Nord

\* On note également un certain retard entre l'action astrale et la réponse des océans ; en un lieu donné, on définit l'âge de la marée comme l'intervalle de temps entre la syzygie (lorsque la Lune et le Soleil passent tous deux dans le plan méridien du lieu) et la plus forte marée qui la suit (cf. figure 5). A Brest par exemple, l'âge de la marée est de 36 heures pour les composantes semi-diurnes et de 4 jours et demi pour les composantes diurnes. Autrefois, on utilisait la notion "d'établissement du port" qui est le retard de la pleine mer sur le passage de la Lune au méridien du lieu considéré (environ 4 heures à Brest).

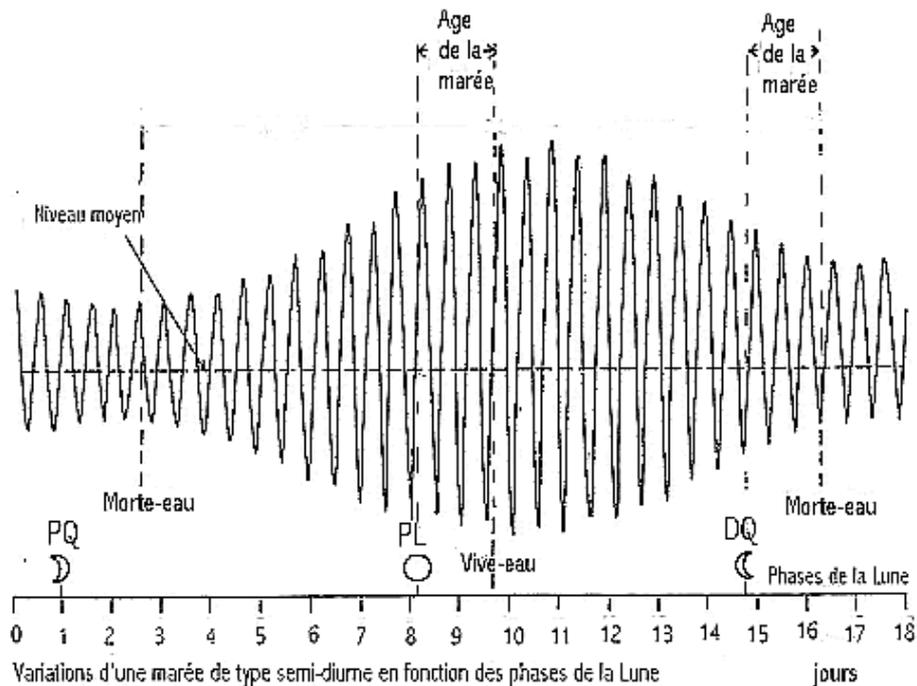


FIG. 5 : Age de la marée

\* Enfin, on constate des écarts extrêmement importants entre les amplitudes de marée prévues par la relation (6) et celles effectivement relevées (cf. figure 6). En particulier, le marnage maximal est d'environ 20 cm en Méditerranée mais 10 m à Roscoff, 15 m au Mont Saint-Michel et 19 m dans la baie de Fundy sur la côte Est du Canada !

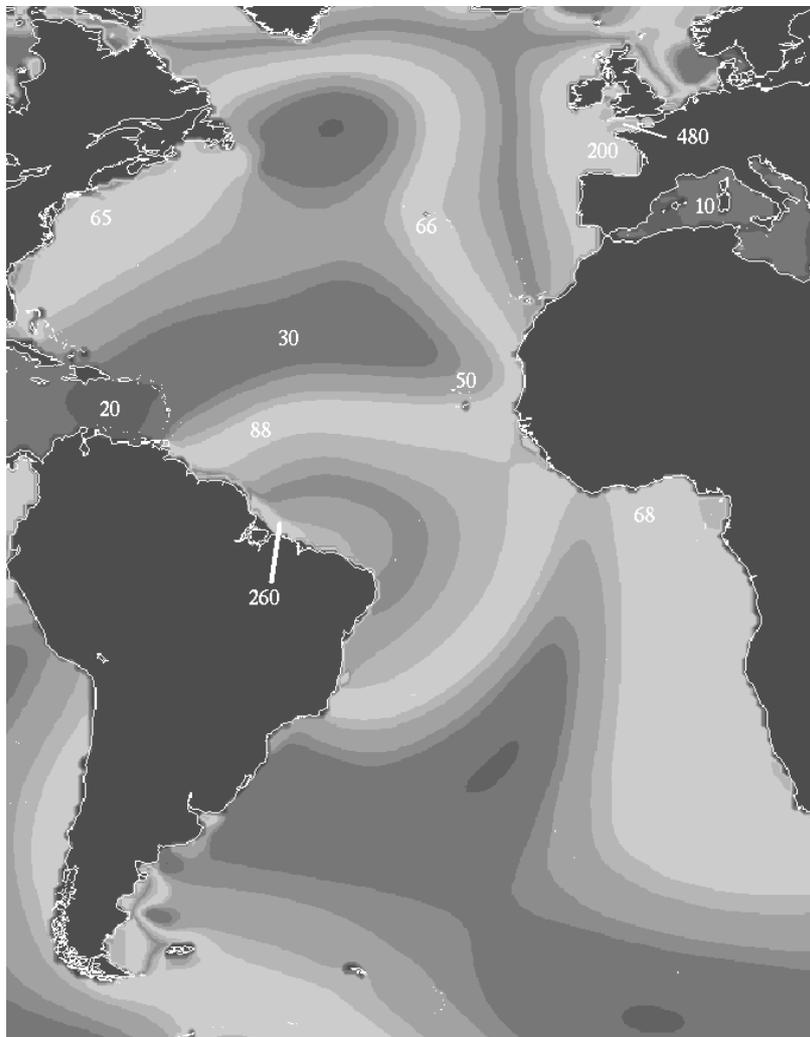


FIG. 6 : Relevé d'amplitude de marée en Atlantique (en cm)

1. Comment peut-on expliquer l'échec du modèle statique des marées? Quels éléments les données des figures (3), (4), (5) et (6) suggèrent-elles de prendre en compte pour améliorer le modèle?
2. On retrouve par contre un pouvoir satisfaisant de prédiction des marées en exploitant la relation suivante :

$$h = \left( \begin{array}{l} \Delta h_L [k_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_L) + k_2 (\sin 2\delta_L \cos (\varphi_{LM} - \beta_L)) + k_3 (\cos^2 \delta_L \cos (2\varphi_{LM} - \alpha_L))] + \dots \\ \Delta h_S [k'_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_S) + k'_2 (\sin 2\delta_S \cos (\varphi_{SM} - \beta_S)) + k'_3 (\cos^2 \delta_S \cos (2\varphi_{SM} - \alpha_S))] \end{array} \right)$$

où  $\Delta h_L, \Delta h_S, k_1, k_2, k_3, k'_1, k'_2, k'_3, \alpha_L, \beta_L, \alpha_S, \beta_S$  sont des constantes locales déterminées par des séries de mesures de  $h$  sur des temps suffisamment longs.

Cette relation à peine retouchée depuis 1799 donne très bien la marée à Brest !

Plus généralement, en un lieu quelconque, on peut exprimer la hauteur d'eau sous la forme d'une série à caractère universel d'ondes sinusoïdales de différentes périodes (formule harmonique des marées) dont on conserve un nombre plus ou moins élevé de termes suivant le degré de précision recherché et dont on détermine les constantes d'amplitude et de phase par une série d'enregistrements du niveau de la mer au lieu considéré.

Justifier sommairement cette formule harmonique en ondes de marée.

## 5 Evolution séculaire du système Terre-Lune

Les marées océaniques sont principalement dues aux mouvements relatifs de la Terre et de la Lune. On se propose d'étudier un modèle simple permettant de comprendre les effets en retour produits à long terme sur ces mouvements relatifs par des phénomènes dissipatifs, en particulier l'allongement de la durée du jour dont on retrouve la trace dans la croissance des coraux et de certains coquillages fossiles. En analysant des dépôts sédimentaires successifs, au rythme des marées, de boue foncée et de sable clair dans un estuaire, le géologue G. Williams est remonté le plus loin dans le temps pour établir que la durée du jour, il y a 2,5 milliards d'année, était de 20 heures environ et que la Lune se trouvait à 348000 kilomètres de la Terre (384000 kilomètres actuellement).

*Dans cette section 5, on s'intéresse aux mouvements relatifs de la Terre et de la Lune en négligeant les effets gravitationnels différentiels produits par le Soleil et les autres planètes dans le référentiel barycentrique  $R_C^*$  du système Terre-Lune ( $C$  désigne le centre de masse de ce système).*

### 5.1 Théorèmes généraux

1. Théorèmes de König
  - (a) Enoncer et démontrer les théorèmes de König relatifs au moment cinétique et à l'énergie cinétique pour un système matériel fermé quelconque.
  - (b) Préciser les expressions de ces grandeurs dans le cas d'un solide dont l'axe instantané de rotation propre dans son référentiel barycentrique est un axe de symétrie matérielle (on fera intervenir le moment d'inertie  $J$  du solide par rapport à son axe instantané de rotation propre).
2. Théorème du moment cinétique
  - (a) Enoncer et démontrer le théorème du moment cinétique pour un système matériel fermé quelconque dans son mouvement par rapport à son référentiel barycentrique.
  - (b) Quel avantage tire-t-on lorsqu'on applique ce théorème au centre d'inertie du système?
3. Théorème de la puissance cinétique
  - (a) Enoncer le théorème de la puissance cinétique pour un système matériel fermé quelconque dans son mouvement par rapport à un référentiel quelconque.
  - (b) Montrer que la puissance totale des forces intérieures au système est invariante dans tout changement de référentiel.
  - (c) Calculer la puissance totale des forces d'inertie dans le référentiel barycentrique du système.
  - (d) Exprimer la puissance totale développée par un champ de forces sur un solide en fonction des composantes du torseur associé à ce champ de forces et du torseur cinématique du solide.

### 5.2 Le problème à deux corps à symétrie matérielle sphérique

1. Déterminer la position du point  $C$  par rapport aux points  $T$  et  $L$ ; on calculera  $\overrightarrow{TC}$  et  $\overrightarrow{LC}$  en fonction de  $m_T, m_L$  et  $\overrightarrow{TL}$ .
2. Sans refaire les calculs mais en adaptant simplement la relation (3), écrire la relation fondamentale de la dynamique dans  $R_C^*$  pour une particule  $P$  de masse  $m$  située dans le voisinage du système Terre-Lune. En déduire que le référentiel  $R_C^*$  se comporte comme un référentiel galiléen à condition de considérer le système particule-Terre-Lune isolé.
3. Montrer que les mouvements des points  $T$  et  $L$  dans  $R_C^*$  se déduisent simplement du mouvement d'une particule ponctuelle fictive (particule réduite) soumise à la force exercée par la Terre sur la Lune; donner l'expression de la masse réduite  $\mu$  de cette particule.
4. Etablir le lien entre l'énergie cinétique  $K_{orbital}^*$  dans  $R_C^*$  du système constitué par les deux points  $T$  et  $L$  affectés des masses  $m_T$  et  $m_L$  et celle de la particule réduite; on exprimera  $K_{orbital}^*$  en fonction de  $\mu$  et  $\vec{v}^*$  (vitesse de la particule réduite dans  $R_C^*$ ).
5. Procéder de même avec le moment cinétique orbital total  $\vec{\sigma}_{orbital}^*$  dans  $R_C^*$  qu'on exprimera en fonction de  $\mu$ ,  $\vec{r}$  (vecteur position de la particule réduite) et  $\vec{v}^*$ .
6. Pourquoi  $\vec{\sigma}_{orbital}^*$  ne dépend-il pas du point où on le calcule?

On suppose désormais que la Terre et la Lune possèdent la symétrie matérielle sphérique

7.  $\vec{\Omega}_T$  (respectivement  $\vec{\Omega}_L$ ) désigne le vecteur vitesse angulaire de rotation propre de la Terre (respectivement de la Lune) dans  $R_C^*$ .  
 $J_T$  (respectivement  $J_L$ ) désigne le moment d'inertie de la Terre (respectivement de la Lune) par rapport à son axe de rotation propre.
  - (a) Exprimer l'énergie cinétique  $K^*$  du système Terre-Lune dans  $R_C^*$  en fonction de  $\mu, J_T, J_L, \vec{v}^*, \vec{\Omega}_T$  et  $\vec{\Omega}_L$ .
  - (b) Exprimer le moment cinétique  $\vec{\sigma}^*$  du système Terre-Lune dans  $R_C^*$  en fonction de  $\mu, J_T, J_L, \vec{r}, \vec{v}^*, \vec{\Omega}_T$  et  $\vec{\Omega}_L$ .
8. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction  $E_P$  du système Terre-Lune en fonction de  $G, m_T, m_L$  et  $d_L$ .
9. Montrer que les vitesses angulaires  $\vec{\Omega}_T$  et  $\vec{\Omega}_L$  de rotation propre, le moment cinétique orbital  $\vec{\sigma}_{orbital}^*$  et l'énergie totale  $E^*$  sont des constantes du mouvement dans  $R_C^*$ .
10. Montrer que le mouvement relatif orbital est plan.

On suppose que l'orbite de la particule réduite est circulaire de rayon  $d_L$  dans  $R_C^*$ .

11. Montrer que cette hypothèse est compatible avec les équations du mouvement
  - (a) Déterminer la vitesse angulaire  $\omega$  du mouvement orbital relatif du système Terre-Lune en fonction de  $m_T, m_L, d_L$  et  $G$ .
  - (b) Calculer la valeur de la période  $T_0$  correspondante en jours solaires.
12. Les vitesses angulaires  $\vec{\Omega}_T$  et  $\vec{\Omega}_L = \vec{\omega} = \omega \vec{z}$  sont supposés colinéaires et de même sens ( $\omega > 0$ ), orthogonales au plan du mouvement orbital relatif. Le mouvement de rotation propre de la Lune est donc synchronisé sur le mouvement relatif orbital.  
 Par quoi cela se traduit-il en pratique ?
13. En comparant les ordres de grandeur des contributions des rotations propres de la Terre et de la Lune, montrer que l'on peut écrire, avec une excellente approximation :

$$\vec{\sigma}^* \simeq \left( m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} + J_T \Omega_T \right) \vec{z} \quad (7)$$

et

$$E^* \simeq -\frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 \quad (8)$$

### 5.3 Effets séculaires de synchronisation produits par les phénomènes dissipatifs de marée

1. Expliquer brièvement pourquoi l'axe de la déformation de marée océanique est entraîné dans le sens de la rotation propre de la Terre et n'a donc pas la direction  $TL$ ; l'angle  $\alpha$  (cf. figure 7) est compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$

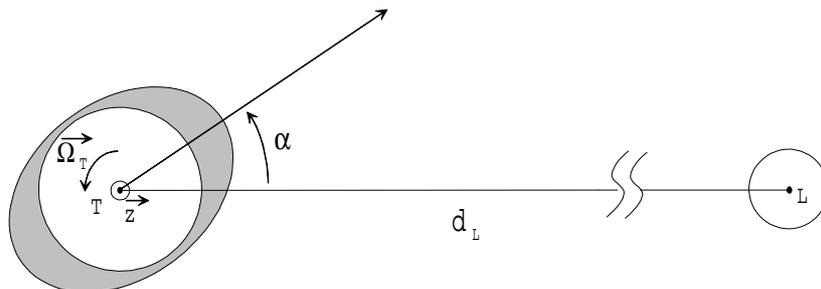


FIG. 7 : Décalage angulaire de l'axe de déformation de marée

2. En supposant que la partie solide de la Terre et la Lune possèdent la symétrie matérielle sphérique et en assimilant la surface libre de l'océan recouvrant toute la Terre à un ellipsoïde (cf. figure 7), montrer qualitativement que la Terre est soumise de la part de la Lune à des effets de freinage de son mouvement de rotation propre.
3. Montrer que le moment résultant calculé en  $T$  des forces exercées par la Lune sur la Terre dépend de la configuration relative Terre-Lune par une expression de la forme :

$$\vec{\mathcal{M}}_T = -\frac{B \sin 2\alpha}{d_L^6} \vec{z} \quad (9)$$

où  $B$  est une constante indépendante de cette configuration relative qu'on exprimera en fonction de  $G, m_T, m_L, r_T$  et  $\rho$  (masse volumique de l'eau).

*En aucun cas il n'est demandé une expression exacte de  $B$  mais une estimation établie à partir d'une modélisation réaliste simple laissée à l'initiative des candidats qui pourront utiliser les résultats de la sous-section 3.2.*

4. Calculer  $\alpha$  sachant qu'actuellement  $B \sin 2\alpha = 1,35 \times 10^{68} SI$ .
5. Cet effet de freinage exercé par la Lune sur le mouvement de rotation propre de la Terre introduit des termes de petite perturbation dans les équations du mouvement et provoque une dérive lente au cours du temps des paramètres du mouvement non perturbé.

D'une manière générale, étant donné une grandeur conservative  $X$  quelconque du mouvement non perturbé, donc telle que  $\left(\frac{dX}{dt}\right)_{\text{mouvement non perturbé}} = 0$ , l'évolution de  $X$  au cours du mouvement perturbé

est pilotée par une équation du type  $\left(\frac{dX}{dt}\right)_{\text{mouvement perturbé}} = f$  où  $f$  est un terme de petite perturbation dépendant des paramètres du mouvement perturbé.

Si l'on désire étudier l'évolution en moyenne à long terme (évolution dite "séculaire") de la grandeur  $X$ , à une échelle de temps grande devant la période du mouvement non perturbé, on pourra appliquer la procédure suivante :

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{\text{sec}} = \langle f \rangle_{\text{mouvement non perturbé}} \quad (10)$$

où  $\left(\frac{dX}{dt}\right)_{\text{sec}}$  désigne la dérivée temporelle séculaire de  $X$

et  $\langle f \rangle_{\text{mouvement non perturbé}}$  est la valeur moyenne du terme de perturbation calculée sur le mouvement périodique non perturbé.

A titre d'exemple, on considère l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dt} = \varepsilon \omega X (1 + \cos \omega t)$$

où  $\varepsilon$  est constant et petit ( $\varepsilon \ll 1$ )

- (a) Donner la solution exacte de cette équation différentielle.
- (b) Donner la solution séculaire en appliquant la procédure définie ci-dessus.
- (c) Comparer les résultats et commenter.

6. En négligeant la masse du double bourrelet océanique (cf. figure 7) et en l'assimilant à un solide en rotation de vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  dans  $R_T^*$  (il est calé sur le mouvement orbital relatif Terre-Lune) et glissant

avec frottement sur la partie solide de la Terre, exprimer  $\left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{R_T^*}$ ,  $\left(\frac{d\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^*}{dt}\right)_{R_C^*}$ ,  $\frac{dE^*}{dt}$  et  $\mathcal{P}_{dis}$

(puissance totale des forces dissipatives de frottement) en fonction de  $\vec{\mathcal{M}}_T$ ,  $\vec{\omega}$  et  $\vec{\Omega}_T$ . Montrer que les effets dissipatifs du phénomène de marée introduisent un couplage entre le mouvement de rotation propre de la Terre et le mouvement orbital Terre-Lune.

7. Au sens des évolutions séculaires :

- (a) Montrer que les équations d'évolution du moment cinétique  $\vec{\sigma}^*$  et de l'énergie totale  $E^*$  du système Terre-Lune dans  $R_C^*$  sont compatibles avec une orbite relative qui évolue lentement en restant circulaire.
- (b) Ecrire l'équation d'évolution du rayon  $d_L$  de l'orbite relative en fonction de  $B, \alpha, m_T, m_L$  et  $G$ .
- (c) Calculer numériquement, en cm/an, la vitesse actuelle de variation de la distance Terre-Lune.
- (d) Déterminer le sens de variation de la vitesse angulaire  $\omega$  du mouvement orbital relatif.
- (e) Montrer que :

$$\frac{dE^*}{dt} = J_T (\Omega_T - \omega) \frac{d\Omega_T}{dt} = \mathcal{P}_{dis} \quad (11)$$

- (f) En déduire le sens de variation de la vitesse angulaire  $\Omega_T$  de rotation propre de la Terre.
- (g) Caractériser le point final de cette évolution séculaire ; montrer en particulier que le mouvement orbital relatif Terre-Lune est alors synchronisé sur le mouvement de rotation propre de la Terre, c'est à dire que l'on a  $\Omega_{T_f} = \omega_f$ .
- (h) Estimer numériquement les rapports  $\frac{d_{L_f}}{d_L}$  et  $\frac{\Omega_{T_f}}{\Omega_T} = \frac{\omega_f}{\omega}$  entre les valeurs dans l'état final et les valeurs actuelles (on pourra négliger  $\Omega_{T_f}$  devant  $\Omega_T$ ) sachant que la période orbitale sidérale actuelle  $\frac{2\pi}{\omega}$  est égale à 27,322 jours solaires actuels ; quelle sera la durée du jour dans l'état final (exprimée en jours solaires actuels) ?
- (i) Pourquoi peut-on penser qu'une partie de la Lune a été liquide au cours de son histoire ?

# PARTIE B : ONDES DE SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE

Les mouvements de l'eau ont des caractéristiques très variées selon les échelles mises en jeu.

Dans cette partie, nous allons décrire un certain nombre de mouvements de petite échelle spatiale tels que les risées (quelques millimètres ou centimètres) ou la houle (quelques mètres ou dizaines de mètres); l'étude des mouvements de moyenne et de grande échelle tels que les courants marins ou les ondes de marée (quelques dizaines ou centaines de kilomètres) utilise des approximations différentes dans les équations de la mécanique des fluides.

La propagation d'ondes de petite échelle à la surface libre d'un liquide met en jeu les forces de pesanteur et les forces de tension superficielle; on se propose de caractériser les différents régimes d'ondes de surface en fonction de la longueur d'onde.

Notons que trois paramètres géométriques caractéristiques interviennent a priori dans ce problème supposé invariant par translation dans la direction  $\vec{y}$  (cf. figure 8) :

- la profondeur  $h$  de la nappe de fluide (ou sa valeur moyenne)
- la variation  $H$  de hauteur de fluide ou "creux" du phénomène
- la longueur d'onde  $\lambda$  du phénomène.

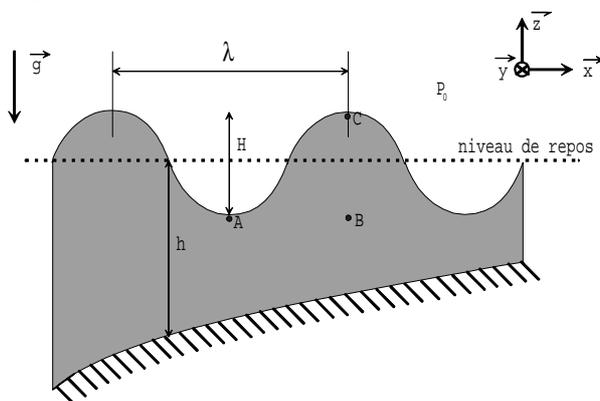


FIG. 8 : Paramètres géométriques du problème

$z = \xi(x)$  est l'équation de la surface  $\Sigma_f$  du fond supposé fixe dans le référentiel d'étude

$z = z_0(x, t)$  est l'équation de la surface libre  $\Sigma_l$  mobile dans le référentiel d'étude.

## 1 Analyse dimensionnelle de la compétition entre les effets de gravité et de capillarité

On considère une onde de longueur d'onde  $\lambda$  à la surface libre d'une nappe d'eau très profonde ( $h \gg \lambda$  et  $H$ ) de masse volumique  $\mu$  dans le champ de pesanteur  $\vec{g} = -g\vec{z}$  supposé uniforme (cf. figure 8). La pression atmosphérique est supposée uniforme ( $P_0$ ) au dessus de l'interface eau-air.

### 1.1 On ne prend en compte que les effets de pesanteur (on néglige les effets de tension superficielle)

1. En comparant les pressions statiques aux points A et B (cf. figure 8), mettre en évidence un mécanisme de rappel assurant la propagation de l'onde de gravité.
2. On admet que la célérité  $c_V$  de l'onde de gravité peut s'écrire en fonction des paramètres pertinents sous la forme :

$$c_V = \alpha g^a \lambda^b \mu^d \tag{12}$$

où  $\alpha$  est une constante sans dimension que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Par analyse dimensionnelle, déterminer la valeur des exposants  $a, b$  et  $d$ .

3. Justifier qualitativement que la masse volumique n'intervient pas dans l'expression de  $c_V$ .

## 1.2 On ne prend en compte que les effets de tension superficielle (on néglige les effets de pesanteur)

On rappelle la loi de Laplace :

$$P - P_0 = -\frac{\gamma}{R} \quad (13)$$

où  $P$  est la pression du liquide au voisinage immédiat de l'interface,  $\gamma$  la constante de tension superficielle de l'eau et  $R \simeq \left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}\right)^{-1}$  le rayon de courbure algébrique local de la surface libre (dans la limite des faibles courbures).

1. En comparant les pressions statiques aux points  $A$  et  $B$ , mettre en évidence un mécanisme de rappel assurant la propagation de l'onde de capillarité.
2. Déterminer l'expression de la célérité  $c_S$  de l'onde capillaire par une analyse dimensionnelle analogue à celle de la sous-section 1.1.

## 1.3 Longueur capillaire ; nombre de Bond

1. (a) Exprimer l'unique grandeur  $l_C$  homogène à une distance, dite "longueur capillaire" du liquide, que l'on peut construire à partir des grandeurs  $\gamma, \mu$  et  $g$  caractéristiques du liquide et du champ de pesanteur (la constante multiplicative sans dimension sera prise égale à un puisque l'on raisonne simplement en termes d'ordres de grandeur).  
 (b) Calculer  $l_C$  dans le cas de l'eau ( $\gamma = 75 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ ).
2. Exprimer l'ordre de grandeur du rayon de courbure  $R(C)$  au point  $C$  en fonction de  $\lambda$  et  $H$ .
3. On définit le "nombre de Bond"  $B_0$  de l'écoulement par :

$$B_0 = \left(\frac{\lambda}{l_C}\right)^2 \quad (14)$$

- (a) Donner la signification physique de  $B_0$ . On pourra comparer les ordres de grandeur de la différence de pression aux points  $A$  et  $B$  dans les deux cas limites considérés dans les sous-sections 1.1 et 1.2.
- (b) Préciser le domaine de longueurs d'onde où l'onde est contrôlée par les effets de gravité et celui où les effets de capillarité dominent.
- (c) Comparer  $c_V$  et  $c_S$  dans ces deux domaines.

## 2 Equations générales des ondes linéaires

L'état mécanique mésoscopique de l'eau est caractérisé par les champs eulériens suivants :

- $\vec{v}(M, t)$  : vitesse du fluide au point  $M$  à l'instant  $t$  dans le référentiel d'étude *supposé galiléen*
- $P(M, t)$  : pression du fluide au point  $M$  à l'instant  $t$
- $\mu(M, t)$  : masse volumique du fluide au point  $M$  à l'instant  $t$

### 2.1 Généralités

1. Approximation hydrodynamique.
  - (a) En quoi consiste l'approximation dite "hydrodynamique" ?
  - (b) Donner un critère de validité de cette approximation.
2. Dérivées lagrangienne et eulérienne.
  - (a) Rappeler la différence entre les points de vue eulérien et lagrangien.
  - (b) Démontrer la relation entre les dérivées lagrangienne  $\frac{DG}{Dt}$  et eulérienne  $\frac{\partial G}{\partial t}$  d'une grandeur physique  $G$  quelconque.
3. Etablir l'équation locale de conservation de la masse :

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (15)$$

## 2.2 Equation du mouvement

On considère la propagation dans la direction  $O\vec{x}$  d'une onde de surface de ce fluide initialement homogène, soumis à l'action du seul champ de pesanteur uniforme, en contact avec l'atmosphère de pression  $P_0$  uniforme (cf. figure 8).

*Les particules fluides sont animées d'un mouvement vibratoire périodique d'échelle spatiale caractéristique  $a$  négligeable devant l'échelle spatiale caractéristique  $\lambda$  de variation des champs eulériens caractérisant l'écoulement supposé parfait.*

1. Etablir l'équation d'Euler :

$$\mu \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}P} \quad (16)$$

2. En déduire que la vitesse caractéristique  $V$  des particules fluides est négligeable devant la célérité  $c$  de l'onde
3. Montrer que l'équation d'Euler (16) peut être linéarisée.
4. Incompressibilité de l'écoulement
  - (a) Exprimer l'ordre de grandeur  $\Delta P$  de la variation horizontale de la pression en fonction des ordres de grandeur de  $V, c$  et  $\mu$ .
  - (b) En comparant les ordres de grandeur des différents termes de l'équation (15) et en admettant que l'ordre de grandeur de la variation  $\Delta\mu$  de la masse volumique vérifie la relation :

$$\Delta P = c_{son}^2 \Delta\mu \quad (17)$$

où  $c_{son}$  est la célérité des ondes sonores dans le fluide, supposée très grande devant la célérité de l'onde considérée ( $c_{son} \gg c \gg V$ ), montrer que l'équation (15) peut être simplifiée et que  $\mu$  est une constante (indépendante de  $M$  et de  $t$ ) à cet ordre d'approximation.

- (c) Interpréter physiquement le lien entre l'hypothèse ( $c_{son} \gg c$  et  $V$ ) et le caractère incompressible de l'écoulement.
  - (d) Préciser numériquement l'ordre de grandeur de la célérité du son dans l'eau.
5. Montrer que les hypothèses permettent de résoudre le problème mécanique sans considération thermodynamique.
  6. Montrer que l'écoulement est irrotationnel à cet ordre d'approximation (on remarquera que dans un tel mouvement vibratoire périodique la valeur moyenne temporelle de la vitesse est nulle).
  7. En déduire l'existence d'un potentiel des vitesses  $\varphi$  tel que  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$  vérifiant les équations suivantes :

$$\Delta\varphi = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + gz = f(t) \quad (19)$$

où  $f(t)$  est une fonction du temps.

## 2.3 Conditions aux limites cinématiques

1. Montrer qu'une particule fluide de la surface libre  $\Sigma_l$  (cf. figure 8) (respectivement de la surface  $\Sigma_f$  du fond) reste constamment sur  $\Sigma_l$  (respectivement sur  $\Sigma_f$ ).
2. Soient  $u, v$  et  $w$  les composantes du champ des vitesses des particules fluides ( $\vec{v}(M \in \text{fluide}) = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$ ); dans le cas particulier considéré d'un écoulement invariant par translation selon  $\vec{y}$  sur un fond fixe défini par l'équation  $z = \xi(x)$  et de surface libre définie par l'équation  $z = z_0(x, t)$ , montrer que :

$$(w)_{(z=\xi)} = \left( \frac{D\xi}{Dt} \right)_{(z=\xi)} \quad (20)$$

$$(w)_{(z=z_0)} = \left( \frac{Dz_0}{Dt} \right)_{(z=z_0)} \quad (21)$$

3. On suppose dans la suite que le fond fixe est le plan horizontal  $z = 0$ .
  - (a) Ecrire les conditions aux limites cinématiques portant sur le potentiel  $\varphi$  des vitesses des particules fluides.
  - (b) Interpréter physiquement les différents termes de la condition aux limites sur la surface libre (un dessin pourra s'avérer utile).
  - (c) Simplifier l'une de ces conditions en exploitant le caractère négligeable de l'échelle spatiale  $a$  du mouvement des particules devant la longueur d'onde  $\lambda$ .
4. On considère dans la suite une onde de creux négligeable devant la profondeur ( $H \ll h$ ).

En exploitant la relation de Laplace (13), montrer que le potentiel des vitesses vérifie à l'ordre le plus bas :  $\forall x$  et  $\forall t$ ,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{(z=0)} = 0 \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial z} + g \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{(z=h)} = f'(t) \quad (23)$$

### 3 Relation de dispersion et mise en évidence des cas limites

#### 3.1 Relation de dispersion

On cherche des solutions du problème sous la forme d'ondes progressives sinusoïdales a priori non homogènes, de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{x}$ . Plus précisément, on pose, sur  $\mathbb{C}$  :

$$\varphi(x, z, t) = \Psi(z) \exp[i(\omega t - kx)] \quad (24)$$

où  $\omega$  et  $k$  sont des réels positifs et  $\Psi(z)$  une fonction que l'on supposera réelle.

Afin d'alléger les notations, on ne réserve pas de notation particulière aux grandeurs complexes associées aux grandeurs physiques.

1. Justifier sommairement la recherche de telles solutions, en particulier la forme de la dépendance en  $x$  et  $z$ .
2. Montrer que  $f$  est une constante et que la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk \left[1 + (kl_C)^2\right]} \quad (25)$$

où  $l_C$  est la "longueur capillaire" mise en évidence par analyse dimensionnelle à la question 1a de la sous-section 1.3.

#### 3.2 Cas limite des ondes de gravité (vagues)

1. Vitesse de phase
  - (a) Déterminer le domaine de longueurs d'onde où les effets de capillarité sont négligeables devant ceux de gravité.
  - (b) Estimer numériquement ce domaine si on tolère une erreur maximale de 1%
  - (c) Donner l'expression de la célérité  $c$  (vitesse de phase) des ondes de gravité pure en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ .
2. Ondes de gravité en eau profonde
  - (a) Que devient cette expression en eau profonde ( $kh \gg 1$ ). Vérifier que l'on retrouve l'expression  $c_V$  obtenue à la question 2 de la sous-section 1.1 par analyse dimensionnelle.
  - (b) Estimer numériquement le domaine de longueurs d'onde où cette célérité limite est utilisable lorsque l'on tolère une erreur maximale de 1%.
  - (c) Montrer que le milieu présente dans ce cas une dispersion normale.
3. Etudier ensuite le cas limite de la nappe d'eau peu profonde ( $kh \ll 1$ ).

### 3.3 Cas limite des ondes de capillarité (rides)

1. Vitesse de phase
  - (a) Déterminer le domaine de longueurs d'onde où les effets de capillarité dominent.
  - (b) Estimer numériquement les limites de ce domaine si on tolère une erreur maximale de 1%.
  - (c) Donner l'expression de la célérité  $c$  (vitesse de phase) des ondes capillaires pures en fonction de la longueur d'onde.
2. Ondes capillaires en eau profonde
  - (a) Que devient cette expression en eau profonde ( $kh \gg 1$ ). Vérifier que l'on retrouve l'expression  $c_S$  obtenue par analyse dimensionnelle à la question 2 de la sous-section 1.2.
  - (b) Estimer numériquement le domaine de longueurs d'onde où cette célérité limite en eau profonde est utilisable lorsque l'on tolère une erreur maximale de 1%.
  - (c) Montrer que le milieu présente une dispersion anormale vis à vis de ces ondes en eau profonde.
3. Que pensez-vous du cas limite en eau peu profonde ?
4. Montrer que lorsque les effets de gravité et de capillarité jouent ensemble dans le contrôle de l'onde *en eau profonde*, la célérité  $c$  passe par un minimum pour une valeur de  $k$  que l'on exprimera en fonction de la longueur capillaire  $l_C$ .

## 4 Ondes créées à la surface de l'eau (en eau profonde) par la chute d'un objet

1. Les trois clichés ci-dessous (figures 9,10 et 11) représentent la même région d'une nappe d'eau "profonde" vue depuis le point de chute d'une pierre à trois instants différents.

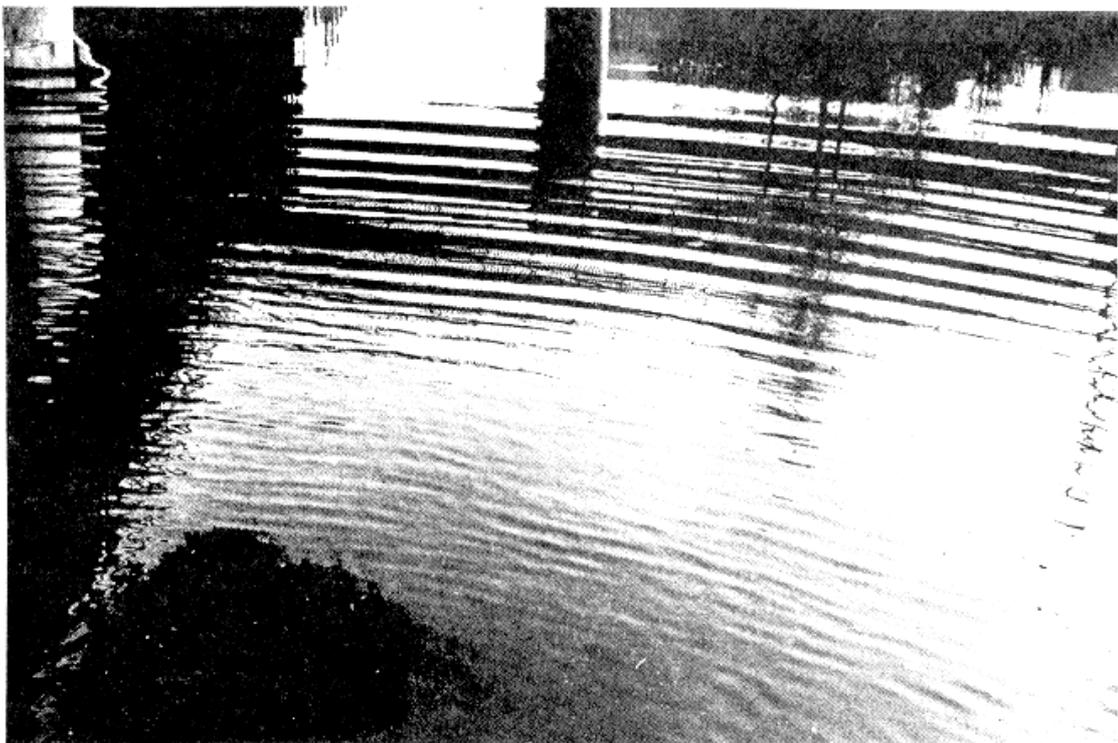


FIG. 9 : Photo prise environ 10 secondes après l'instant de l'impact

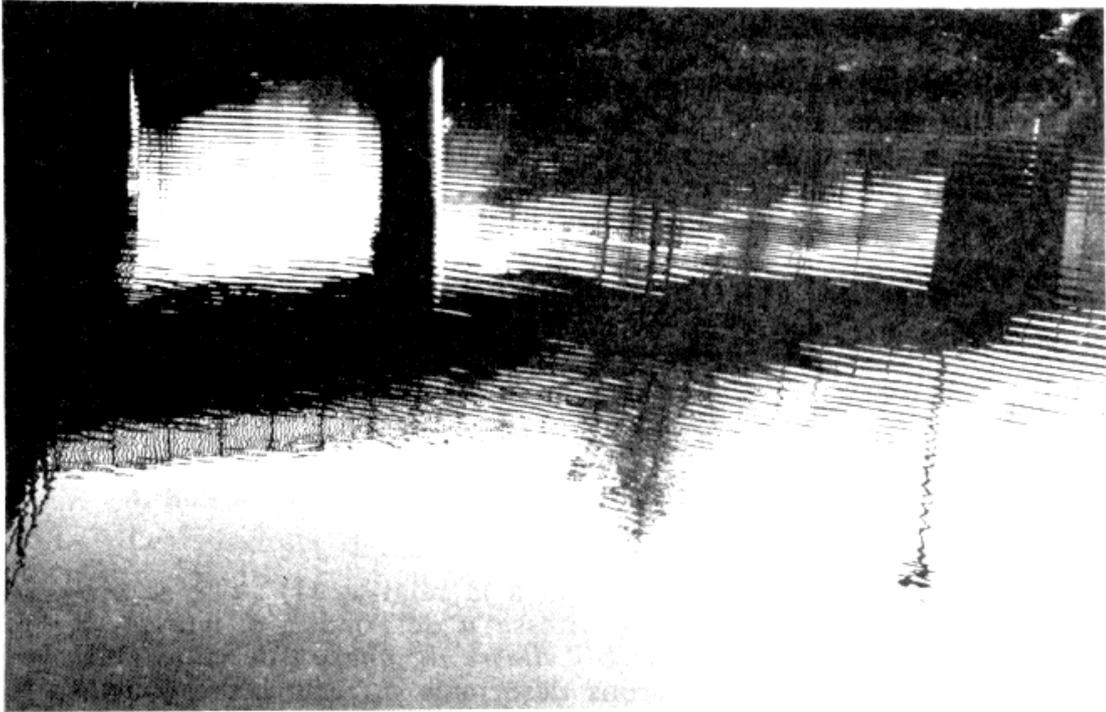


FIG. 10 : Photo prise environ 20 secondes après l'instant de l'impact

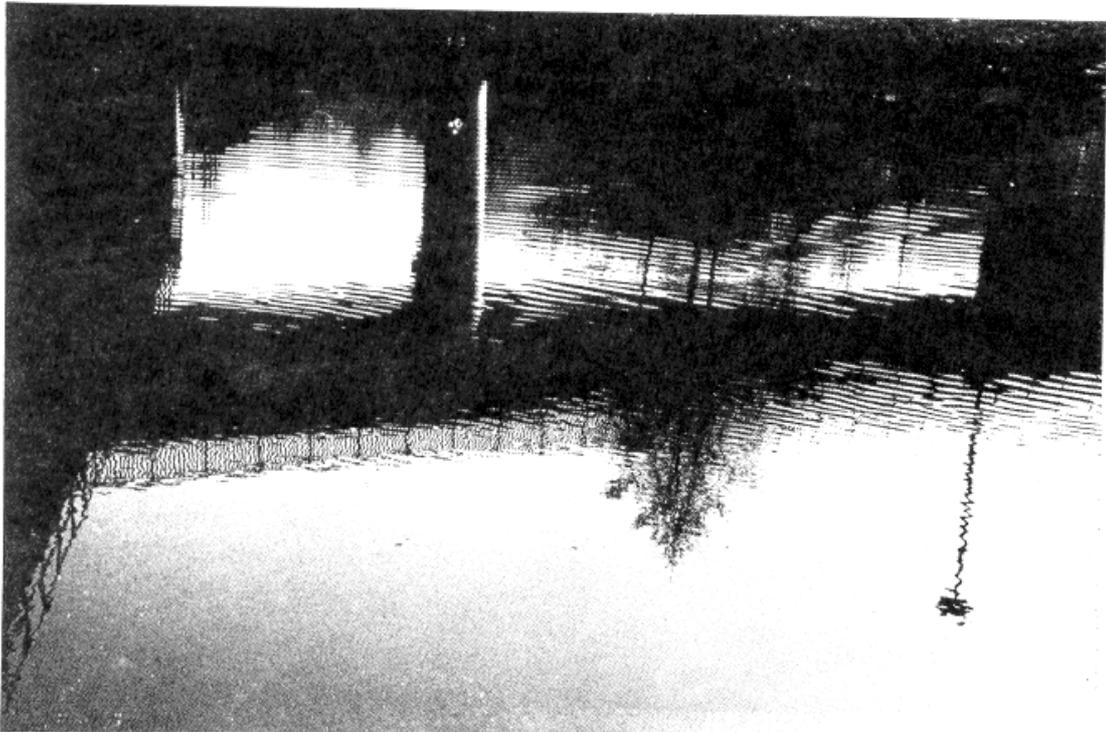


FIG. 11 : Photo prise environ 30 secondes après l'instant de l'impact

Interpréter ces clichés à la lumière des résultats établis ci-dessus (section 3).

2. Le cliché ci-dessous (figure 12) a été pris environ 1 seconde après la chute d'un petit gravier dans une nappe d'eau profonde.  
Interpréter ce cliché à la lumière des résultats établis ci-dessus (section 3).

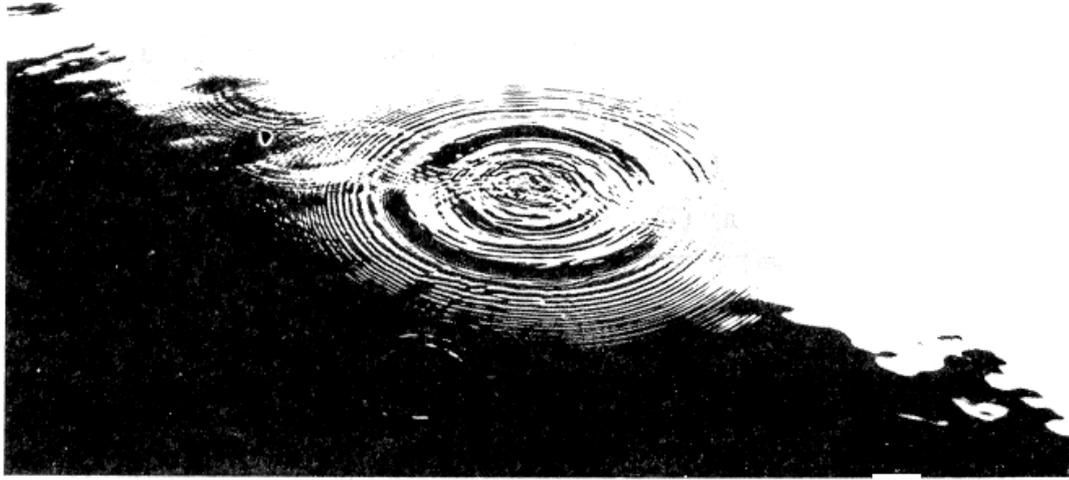


FIG. 12 : Photo prise environ 1 seconde après l'instant de l'impact d'un petit gravier avec la surface de l'eau

## 5 La houle irrotationnelle de Stokes

La houle est un train d'ondes produit dans une zone appelée "fetch" par des vents forts soufflant à la surface des océans. La longueur d'onde  $\lambda$  des composantes du train peut varier entre quelques dizaines et quelques centaines de mètres tandis que leurs creux  $H$  peut varier de 1 à 20 mètres selon l'étendue du fetch, la vitesse du vent et la durée pendant laquelle il souffle.

*On suppose dans la suite que les résultats établis dans la section 2 sont applicables (cas de la houle irrotationnelle de Stokes).*

### 5.1 Généralités

1. Naissance de la houle  
Expliquer qualitativement pourquoi le vent peut constituer le moteur d'une instabilité (dite de Kelvin-Helmoltz) provoquant l'amplification d'une petite déformation de la surface de l'eau
2. Montrer que la houle est une onde de gravité pure.
3. Déterminer, dans le cas d'une houle sinusoïdale pure de creux  $H$ , la fonction  $\Psi(z)$  figurant dans l'expression du potentiel  $\varphi$  des vitesses défini par la relation (24) en fonction de  $z, g, \omega, k, h$  et  $H$ .
4. Donner l'équation de la surface libre.
5. Champ des vitesses
  - (a) Donner les composantes  $u(x, z, t)$  et  $w(x, z, t)$  du champ des vitesses du fluide ( $\vec{v} = u\vec{x} + w\vec{z}$ ) en fonction de  $x, z, t, H, k, h$  et  $T$  (période de la houle).
  - (b) En déduire l'expression des vitesses maximales horizontale et verticale.

### 5.2 Cas de la houle en eau profonde ( $kh \gg 1$ )

1. Hiérarchie des paramètres géométriques
  - (a) Montrer que les vitesses horizontale et verticale ont même ordre de grandeur.
  - (b) Déterminer l'échelle spatiale  $a$  du mouvement des particules fluides en fonction des paramètres géométriques ( $H, \lambda, h$ ) de l'écoulement.
  - (c) Montrer que ces paramètres doivent vérifier la hiérarchie :  $H \ll \lambda \ll h$ .

2. Calculer la célérité  $c$  et la période  $T$  d'une houle sinusoïdale pure de longueur d'onde  $\lambda = 100$  m *en eau profonde*.
3. Préciser la profondeur  $h$  à partir de laquelle l'approximation en eau profonde est vérifiée à mieux que 1% près.
4. Une tempête sur un océan produit un train de houle de grande étendue (quelques centaines à quelques milliers de kilomètres).  
Expliquer pourquoi la zone d'agitation s'élargit constamment et pourquoi les vagues observées loin du fetch sont de plus courte période en fin de tempête qu'au début.
5. Les vagues qui se succèdent au cours d'une tempête n'ont pas toutes la même hauteur.  
Proposer une explication au calme relatif que l'on peut parfois observer entre des vagues particulièrement fortes qui reviennent avec une certaine périodicité.

### 5.3 Cas de la houle en eau peu profonde ( $kh \ll 1$ )

1. Hiérarchie des paramètres géométriques
  - (a) Montrer que la vitesse verticale est négligeable.
  - (b) Déterminer l'échelle spatiale  $a$  du mouvement des particules fluides en fonction des paramètres géométriques ( $H, \lambda, h$ ) de l'écoulement.
  - (c) Montrer que ces paramètres doivent vérifier la hiérarchie :  $H \ll h \ll \lambda$ .
2. Dans le cas d'une houle se propageant dans une direction normale aux lignes bathymétriques (lignes d'égale profondeur), montrer que les lignes de crêtes des vagues sont de plus en plus serrées à l'approche du rivage.
3. Lorsque sa direction de propagation est quelconque par rapport aux lignes bathymétriques, montrer que la houle "tourne" à l'approche du rivage de façon à ce que ses lignes de crêtes s'orientent parallèlement aux lignes bathymétriques.
4. On peut montrer par des considérations énergétiques que si  $h < 0,15\lambda$ , le creux  $H$  est une fonction décroissante de la profondeur  $h$ .
  - (a) En déduire qu'à l'approche du rivage, lorsque la profondeur diminue continûment, l'onde finit par sortir de son domaine de linéarité.
  - (b) Montrer que ces effets de non linéarité se traduisent par un "raidissement" du front des vagues pouvant conduire à leur déferlement.
  - (c) A quelle(s) condition(s) y a-t-il, à votre avis, déferlement ?

## 6 Un exemple d'onde non linéaire : l'onde "solitaire"

On considère la propagation à la surface libre d'une nappe d'eau de profondeur  $h$  constante, d'une perturbation localisée dont le profil d'extension spatiale  $d$  présente une hauteur  $H$  (figure 13) :

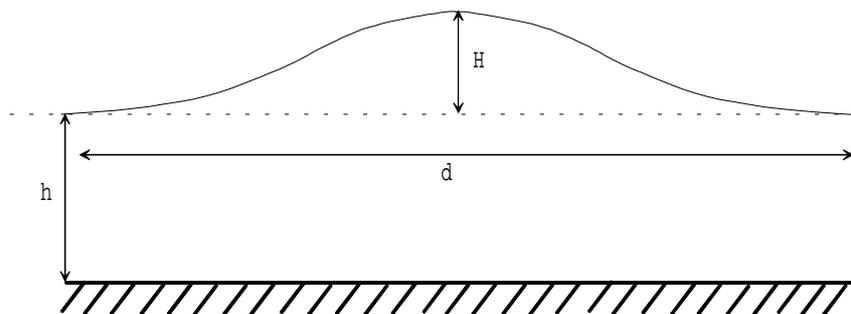


FIG. 13 : L'onde solitaire

La mise en évidence de deux mécanismes qui se contraignent permet de comprendre qualitativement la possibilité d'une propagation sans déformation et une étude simple fournit une relation en ordres de grandeur entre les paramètres d'une telle onde dite "solitaire" dans le cadre d'un écoulement irrotationnel.

Les "tsunamis" (raz de marée d'origine sismique) peuvent également présenter une structure d'onde solitaire, notamment en eau moyennement profonde, sur le plateau continental par exemple.

Les paramètres de l'onde vérifient les conditions suivantes :

$$(H \ll h < d) \text{ et } \left( \left( \frac{h}{d} \right)^2 \ll 1 \right)$$

1. Dispersion en fréquence

- (a) Déterminer l'ordre de grandeur de l'extension  $[k_{\min}, k_{\max}]$  du spectre de Fourier spatial de l'onde.
- (b) Montrer qu'il y a dispersion en fréquence tendant à produire un étalement du profil.
- (c) Déterminer l'ordre de grandeur de la différence de célérité  $\Delta c$  des composantes extrêmes du spectre de l'onde.

2. Par un mécanisme de dispersion en amplitude, les effets non linéaires provoquent au contraire un "resserrement" du profil ("raidissement" du front d'onde étudié à la question 4 de la sous-section 5.3).

En considérant le cas limite en eau peu profonde de l'onde sinusoïdale contrôlée uniquement par la profondeur, déterminer, à l'ordre 1 en  $\frac{H}{h}$ , l'ordre de grandeur de la différence de célérité  $\Delta c'$  entre la base et le sommet du profil.

3. Dans le cas de l'onde solitaire, les phénomènes de dispersion en fréquence et en amplitude se compensent.

Montrer que le nombre d'Ursell  $U = \frac{Hd^2}{h^3}$  de l'onde solitaire est de l'ordre de l'unité.