

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

Quelques aspects de la circulation sanguine

L'étude des propriétés physiques de la circulation sanguine, ou hémodynamique, permet de mieux comprendre la physiologie du système circulatoire. Nous nous intéressons dans ce problème à quelques exemples d'application de ces méthodes d'étude.

Le flux sanguin est la superposition d'un flux continu et d'un flux périodique. Ces deux aspects sont successivement abordés. La première partie est consacrée à l'étude d'un écoulement permanent dans un réseau de vaisseaux. La deuxième partie concerne la propagation d'une onde de pression dans une artère et le rôle de la distensibilité des vaisseaux. Dans la troisième partie est étudié l'effet d'un embranchement entre vaisseaux.

Les deuxième et troisième parties sont indépendantes de la première.

Valeurs numériques

Les valeurs correspondant à des grandeurs physiologiques peuvent différer de manière appréciable entre personnes : les valeurs données sont des moyennes.

Type de vaisseau	Diamètre (en mm)	Nombre
artère aorte	10	1
grandes artères	3	40
branches principales	1	600
branches secondaires	0,6	1800
branches tertiaires	0,14	$7,6 \times 10^4$
artères terminales	0,05	10^6
branches terminales	0,03	13×10^6
artérioles	0,02	4×10^7
capillaires	0,008	$1,2 \times 10^9$

Tableau 1. Diamètre et nombre des différents types de vaisseaux de l'être humain.

Espèce	Battements cardiaques par min	Rayon de l'aorte (cm)
Lapin	200	0,17
Chien	125	0,4
Homme	60	0,5
Bœuf	40	2
Souris m=30g	700	0,04
Eléphant m=2000kg	40	4

Tableau 2. Fréquence cardiaque pour différentes espèces.

Masse volumique de l'eau : $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$

Débit volumique cardiaque pour l'être humain : $Q = 4,5 \text{ L/min}$

Viscosité cinématique du sang : $\nu = 3,8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Première partie

Écoulement permanent dans un réseau de vaisseaux

Dans cette première partie, on modélise la circulation sanguine par un écoulement permanent. Le sang est décrit comme un fluide incompressible de viscosité η et de viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$, où ρ est la masse volumique.

1. On considère un vaisseau unique modélisé par un tube cylindrique de section circulaire de rayon r et parcouru par un débit volumique Q .

a) Rappeler la signification physique du nombre de Reynolds Re et déterminer son expression pour l'écoulement dans ce tube en fonction du débit et du rayon. Que valent les nombres de Reynolds correspondant aux écoulements dans les artères, dans les capillaires? Que peut-on en conclure sur le type de l'écoulement?

b) Pour faire circuler le fluide sur une longueur L de tube, il faut appliquer une différence de pression ΔP proportionnelle au débit : $\Delta P = K Q$. La résistance hydraulique K pour un tube cylindrique de rayon r est donnée par l'expression $K = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$. Quelle puissance \mathcal{P} doit-on fournir pour maintenir l'écoulement?

c) L'écoulement est à l'origine d'une force tangentielle sur les parois du tube. A l'aide d'un bilan relatif, en régime permanent, à l'ensemble du fluide contenu dans la longueur L du tube, déterminer la force tangentielle par unité de surface f exercée par le fluide sur la paroi du tube en fonction de Q , r et de η .

2. On considère un modèle très simplifié de système circulatoire composé de deux types de vaisseaux (figure 1) : un nombre N_a d'artères, chacune de longueur L_a , et un nombre N_c de vaisseaux capillaires, chacun de longueur L_c . Dans ces conditions, on cherche à déterminer le choix optimal pour les rayons r_a et r_c des artères et des capillaires.

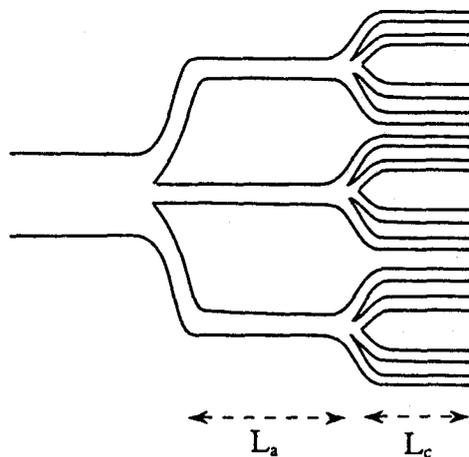


Figure 1

On supposera que la vitesse du fluide est uniforme dans chaque zone et vaut u_a dans les artères et u_c dans les capillaires.

a) Un débit volumique total Q s'écoule dans ce circuit. Déterminer les débits q_a et q_c circulant respectivement dans une artère et dans un capillaire. En déduire la différence de pression ΔP entre les deux extrémités du réseau et en déduire sa résistance hydraulique $K_{\text{tot}}(r_a, r_c) = \Delta P/Q$.

b) L'épaisseur e de la paroi des vaisseaux est proportionnelle à leur rayon : $e = \alpha r$. ($\alpha \ll 1$). Quel est le volume de matière nécessaire $V(r_a, r_c)$ pour réaliser le système circulatoire ?

c) L'organisme dispose d'un volume donné V_0 de tissus pour réaliser les parois du système circulatoire. Déterminer la relation entre les rayons et les nombres des deux types de vaisseaux permettant d'obtenir une résistance hydraulique minimale. [On pourra étudier des variations de rayon dr_a et dr_c laissant le volume V_0 constant].

3. Le raisonnement précédent peut se faire avec un réseau plus complexe. On obtient encore la relation obtenue à la question 2.c), qui s'exprime sous la forme $N(r) = \lambda r^3$.

a) Que vaut l'exposant β ? Comparer avec les données du *tableau 1* en reportant celles-ci sur un graphe en coordonnées log-log.

b) Pour un organisme donné, comment le nombre de Reynolds dépend-il du diamètre des vaisseaux ?

c) Exprimer la force tangentielle par unité de surface agissant sur les parois en fonction du débit total Q , de N et de r . Quelle remarque le résultat suggère-t-il ?

Deuxième partie Propagation d'ondes dans un tube élastique

On considère un tube élastique de longueur infinie que l'on repère avec un axe Ox (figure 2). On supposera par la suite que toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de l'abscisse x et du temps. A l'intérieur de ce tube on trouve un fluide que l'on considère non visqueux. On notera $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t)$ la masse volumique de ce fluide, $P(x, t) = P_0 + P_1(x, t)$ la pression et $u(x, t)$ sa vitesse que l'on supposera dirigée selon l'axe Ox . Les grandeurs ρ_0 et P_0 correspondent à l'état du fluide au repos. Les effets de pesanteur sont négligés.

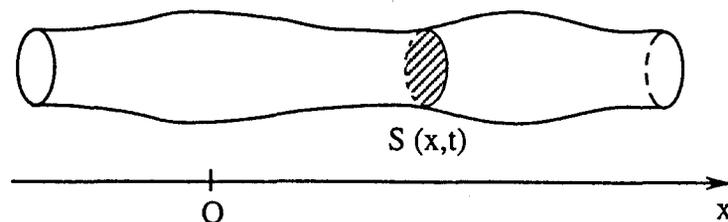


Figure 2

1. Dans cette partie, on s'intéresse à l'aorte et aux grosses artères de l'être humain.

a) Justifier que l'on peut négliger les effets de la viscosité pour étudier la dynamique de la circulation dans cette partie du système circulatoire. Ecrire l'équation d'Euler pour le fluide.

b) Linéariser l'équation obtenue. A quelles conditions peut-on le faire ? [On vérifiera à la fin de cette section que ces conditions sont bien satisfaites.]

2. Le tube est élastique de section variable $S(x, t) = S_0 + S_1(x, t)$.

a) Etablir l'équation exprimant la conservation de la matière. [On considérera le fluide dans le volume compris entre x et $x + dx$.]

b) Linéariser cette équation. En utilisant le coefficient de compressibilité isentropique du fluide χ et le coefficient de distensibilité du tube $D = \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial P}$, obtenir une équation reliant $\frac{\partial P_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$.

3. En déduire l'équation de propagation pour les ondes dans ce tube et montrer que leur célérité est donnée par :

$$\frac{1}{c^2} = \rho_0(\chi + D)$$

4. La masse volumique du sang ainsi que sa compressibilité sont semblables à celles de l'eau. La célérité du son dans l'eau vaut $c_s = 1400$ m/s. Déterminer la célérité des ondes dans un tube métallique dont la distensibilité vaut $D_m = 10^{-11}$ Pa⁻¹ et dans un vaisseau sanguin où la distensibilité vaut $D_v = 4 \times 10^{-5}$ Pa⁻¹. Comparer les valeurs obtenues.

5. On place en $x = 0$ une pompe imposant un débit massique $Q_m(t)$ à l'origine. On suppose que cet écoulement est tel que les vitesses et surpressions sont petites.

a) En supposant qu'aucune onde ne provient de l'infini, déterminer l'expression de la vitesse $u(x, t)$ et de la surpression $P_1(x, t)$ du fluide sur le demi-axe Ox positif à l'aide de la fonction Q_m .

b) Le débit volumique moyen imposé par le cœur est $Q = 4,5$ L/min. Quel est l'ordre de grandeur de la surpression nécessaire pour assurer ce débit ? Comparer avec le cas d'un tube rigide. Commenter.

c) Avec l'âge, la distensibilité des vaisseaux diminue (artériosclérose). Quels effets de ce phénomène prévoyez-vous sur l'organisme ? Un moyen de traitement est d'insérer un ballon (très allongé) rempli de gaz dans l'aorte, ne l'obturant qu'en partie ; justifier qualitativement ce procédé.

6. Que peut-on penser des approximations faites lors de la linéarisation pour les valeurs données dans cette partie ? Evaluer en particulier l'amplitude relative des oscillations de rayon de l'aorte.

Troisième partie

Réseau en régime sinusoïdal

On s'intéresse dans cette section aux propriétés du réseau sanguin en régime périodique. On utilise la même modélisation que dans la deuxième partie mais on néglige la compressibilité du fluide. Dans les questions qui suivent, on étudie différents raffinements que l'on peut apporter au modèle étudié précédemment. En particulier, on montre l'utilité du concept d'impédance pour la compréhension du système.

On considère des mouvements harmoniques de pulsation ω . On utilisera la notation complexe. On note \underline{a} l'amplitude complexe d'une grandeur $a(t)$ telle que $a(t) = \text{Re}(\underline{a} e^{-i\omega t})$.

1. On définit l'impédance hydraulique complexe Z d'un système comme le rapport des amplitudes complexes de la surpression et du débit volumique Q à l'origine du système : $\underline{P}_1 = Z \underline{Q}$. Quelle est l'impédance Z_0 du tube considéré dans la deuxième partie ?

2. Le système circulatoire comporte des embranchements. On s'intéresse au premier de ces embranchements entre l'aorte (qui part du cœur) et les artères iliaques : cet embranchement se trouve au niveau de l'aîne. On considère donc un embranchement où une artère de section s_1 se sépare en deux artères dont la somme des sections est s_2 à une distance L de l'origine. La distensibilité des deux types de vaisseaux est supposée identique.

a) Pour $x > L$, le fluide circule dans deux vaisseaux parallèles. On considérera que les différentes grandeurs physiques sont identiques dans ces deux vaisseaux. Préciser les conditions de passage à l'embranchement pour la pression et le débit.

b) On considère une onde partant de l'origine. Déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la pression ; les exprimer en fonction de s_1 et de s_2 . [On considérera une solution de la forme $P_1 = a_1 \exp i(kx - \omega t) + b_1 \exp i(-kx - \omega t)$ pour $0 < x < L$ et $P_1 = a_2 \exp i(kx - \omega t)$ pour $x > L$].

c) Déterminer l'impédance Z à l'origine de ce nouveau système.

d) Les modules de l'impédance Z et de l'admittance $Y = \frac{1}{Z}$ présentent des maximums (résonances). Pour quelles longueurs L de l'artère principale se produisent ces résonances ? Préciser les longueurs L correspondant aux résonances de $|Y|$ en fonction du rapport des sections s_2/s_1 .

e) Pour l'être humain, la longueur de l'aorte est d'un peu plus d'un mètre, le rythme cardiaque moyen est de 60 pulsations à la minute et le rapport des sections vaut $s_2/s_1 = 0,4$. Montrer que cette longueur correspond à une situation optimale pour le cœur. En supposant la condition de résonance trouvée exactement vérifiée, déterminer le coefficient de réflexion et comparer l'impédance Z_R correspondante à Z_0 .

3. On cherche maintenant à prendre en compte les effets de la viscosité.

a) En présence de viscosité apparaît un gradient de pression proportionnel à la

vitesse : $\frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{visc} = -\gamma u$. Relier le coefficient γ à la résistance K introduite dans la question 1.b) de la première partie. Comment est modifiée l'équation d'Euler linéarisée obtenue à la question 1.b) de la deuxième partie ?

b) Montrer que pour un tube de longueur finie, l'impédance pour le continu et à basse fréquence est dominée par la dissipation et à haute fréquence par la propagation. [On ne demande pas le calcul de l'impédance d'un tube fini en présence de dissipation mais une justification qualitative.]

c) En ne considérant que le premier harmonique de la pulsation cardiaque, on peut écrire le débit imposé par le cœur $Q(t) = Q_0(1 + \cos \omega t)$. Déterminer la pression au niveau du cœur, le rythme cardiaque étant considéré comme de « haute fréquence ». Tracer l'allure des graphes de Q et P sur un même diagramme. (La chute de pression moyenne est de 2×10^4 Pa).

d) Donner l'expression de la puissance moyenne fournie par le cœur. En comparant avec un tube rigide, préciser le rôle de la distensibilité de l'aorte ; est-il bénéfique ?

4. Jusqu'à présent, on a considéré un écoulement unidimensionnel. Dans cette question, on étudie qualitativement des effets à 3 dimensions.

a) La vitesse dans le tube dépend aussi de r (où r est la distance à l'axe du point considéré en coordonnées cylindriques). On supposera toutefois que sa direction est toujours parallèle à l'axe du vaisseau. Décrire qualitativement l'écoulement dans le vaisseau et discuter les forces qui s'exercent sur un élément de fluide.

b) Dans le régime que nous considérons, l'équation régissant l'évolution de la vitesse $u(x, r, t)$ dans un vaisseau est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} .$$

On ne cherchera pas à résoudre cette équation mais à comparer les situations physiques correspondant à différents animaux. Pour décrire la dépendance radiale de la vitesse dans l'artère de rayon r_0 on pose $\xi = r/r_0$ où ξ est un paramètre sans dimension. On considère un écoulement périodique de la forme $u(r, x, t) = u_0(\xi, x) \exp(-i\omega t)$.

Ecrire l'équation vérifiée par u_0 en utilisant le paramètre ξ et faire apparaître un nouveau nombre sans dimension noté κ tel que :

$$-i\kappa^2 u_0 = \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right) + \dots$$

Quels régimes permet de distinguer le paramètre κ . Evaluer ce paramètre pour l'aorte d'un être humain ; qu'en concluez-vous ?

c) En supposant que le régime sanguin dans l'aorte est le même pour tous les mammifères, établir une loi d'échelle reliant le rayon de l'aorte d'un animal et son rythme cardiaque. Les valeurs du tableau 2 permettent-elles de justifier cette hypothèse? Quel est le mammifère de la liste qui, du point de vue de cette étude, se rapproche le plus de l'être humain?

* *

*