ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 1997 OPTION PC

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

***

Mesure de forces à courte portée entre deux surfaces

Ce problème a pour objet l'étude d'un appareil de mesure directe des forces d'interaction entre deux surfaces macroscopiques, non rugueuses à l'échelle atomique, en fonction de leur séparation.

Le schéma du montage expérimental est donné sur la figure 1. Deux lames minces transparentes de silice, d'aire voisine de 1 cm^2 et d'épaisseur L de l'ordre de 1 à 3 μm, sont argentées sur une face, puis accolées par leur face argentée à deux autres lames transparentes également en silice, nettement plus épaisses et jouant le rôle de supports.

L'ensemble inférieur est fixé à l'extrémité d'une lame élastique qui a les mêmes effets qu'un ressort de raideur K en ce qui concerne les déplacements verticaux. L'ensemble supérieur peut être déplacé en translation verticale à l'aide d'une céramique piézoélectrique dont l'expansion ou la contraction dépend linéairement d'une tension électrique U appliquée.

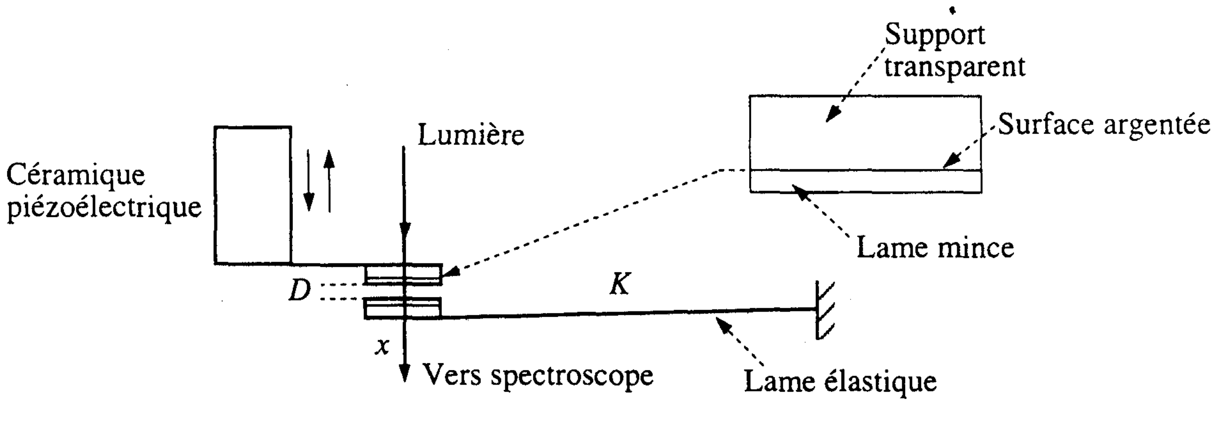

Figure 1

Données numériques

Charge électrique élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \times 10^{-23}$J K^{-1}
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12}\, SI$

Les trois premières parties du problème sont totalement indépendantes.

Première partie

Cette partie est consacrée au principe de la détermination par une méthode optique de la séparation D entre les lames (figure 1). Ces lames d'indice n ont leurs faces planes et parallèles. Les couches d'argent, d'épaisseur négligeable, sont partiellement réfléchissantes. Une onde lumineuse incidente sur une telle couche donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise. Pour une onde plane sous incidence normale, sa polarisation ne jouant aucun rôle, on adopte une description scalaire. Soient r et t les coefficients de réflexion et de transmission des amplitudes complexes sous incidence normale. On les supposera réels et indépendants de la longueur d'onde dans le domaine visible. On posera $R = r^2$ et $T = t^2$, avec $R + T = 1$.

Dans un premier temps (questions **1.** à **5.**), on suppose $D = 0$, les lames de silice étant en contact (figure 2).

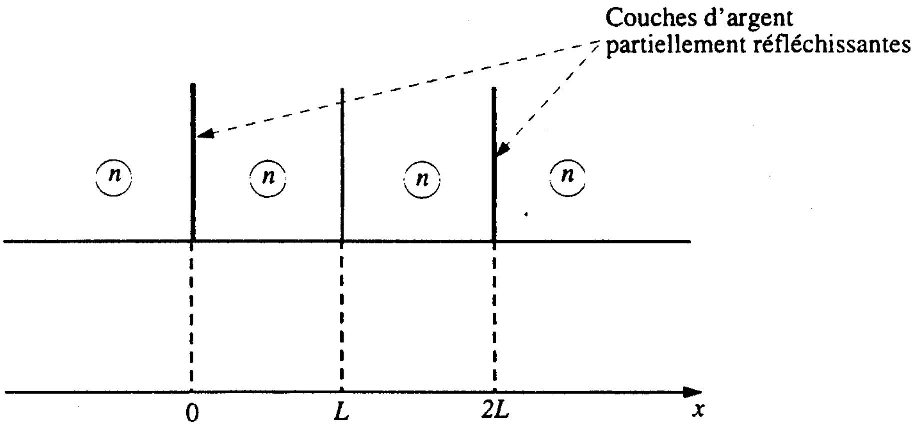

Figure 2

L'onde incidente plane monochromatique de pulsation ω se propage dans le sens des x croissants. On note respectivement λ^0 et λ sa longueur d'onde dans le vide et dans la silice. En régime stationnaire, on suppose que dans les lames de silice l'amplitude de la vibration optique est donnée par les expressions suivantes :

$$x < 0 \quad E_1(x,t) = Re[A\, e^{i(kx-\omega t)} + B\, e^{i(-kx-\omega t)}]$$
$$0 < x < 2L \quad E_2(x,t) = Re[C\, e^{i(kx-\omega t)} + F\, e^{i(-kx-\omega t)}]$$
$$x > 2L \quad E_3(x,t) = Re[G\, e^{i(kx-\omega t)}]$$

1. Justifier le choix de ces trois expressions en précisant l'onde que représente chacun des 5 termes d'amplitudes A, B, C, F, G. Pourquoi $E_3(x,t)$ ne comporte-t-il qu'un seul terme? Exprimer k en fonction de n et λ^0.

2.a) En analysant en $x = 0$ l'origine de l'onde d'amplitude C, exprimer C en fonction de A, de F et à l'aide de r et t.

b) Par une analyse semblable en $x = 2L$, exprimer F et G en fonction de C.

c) En déduire le facteur $\rho = \left|\frac{G}{A}\right|^2$. Que représente-t-il? Le mettre sous la forme:

$$\rho = \frac{1}{1 + \beta \sin^2 \varphi}$$

où β et φ sont à expliciter.

3.a) Déterminer les valeurs de k qui rendent ρ maximal; on les désignera selon leurs valeurs croissantes par k_m, k_1 étant la plus petite valeur non nulle; l'entier m sera appelé l'ordre de k.

b) Exprimer les longueurs d'onde (dans le vide) λ^0_m correspondantes.

c) Pour $n = 1,5$ et $L = 2\,\mu$m, quelles sont les valeurs de m telles que λ^0_m soit dans le spectre visible?

4. On suppose R très proche de 1. On prendra $R = 0,97$ pour les applications numériques.

a) Étudier la variation de ρ en fonction de k. Préciser ses valeurs maximales $\rho_{\mathbf{max}}$ et minimales $\rho_{\mathbf{min}}$. Quelle est la valeur numérique de $\rho_{\mathbf{max}}/\rho_{\mathbf{min}}$?

b) Déterminer les valeurs k'_m et k''_m de k correspondant à $\rho = \rho_{\mathbf{max}}/2$ et encadrant k_m. Quel est l'écart $\Delta k_m = |k''_m - k'_m|$?

c) Soit $\Delta\lambda^0_m$ l'écart de longueur d'onde correspondant à Δk_m. Exprimer le rapport $\lambda^0_m/\Delta\lambda^0_m$ à l'aide de R et de m et l'évaluer numériquement. Commenter ce résultat.

5.a) On éclaire maintenant les lames avec un faisceau parallèle de lumière blanche, toujours sous incidence normale. On analyse la lumière transmise à l'aide d'un spectrographe à réseau suffisamment résolvant. Qu'observe-t-on?

b) Montrer qu'il est possible, sans connaître a priori l'épaisseur L, de déterminer l'ordre m à partir de la mesure d'une longueur d'onde transmise λ^0_m et de la p ième suivante λ^0_{m+p} (on supposera que la loi de dispersion $n(\lambda^0)$ de la silice est connue).

Dans la suite du problème, on négligera la dispersion de la silice et on prendra n constant.

6. On écarte maintenant les lames de quelques dizaines de nm, l'intervalle d'épaisseur D étant alors constitué d'un film liquide transparent d'indice n'. On néglige les effets de réflexion aux interfaces de ce film avec les lames de silice et on ne tiendra compte que du chemin optique supplémentaire ainsi introduit.

a) Donner dans ces conditions la nouvelle expression de ρ. Déterminer les valeurs k_m^D de k pour lesquelles ρ est maximal.

b) On note λ_m^D la longueur d'onde (dans le vide) transmise d'ordre m pour $D \neq 0$. Exprimer $\delta\lambda_m = \lambda_m^D - \lambda_m^0$.

c) Proposer une procédure expérimentale permettant de déterminer le produit $n'D$ supposé inconnu.

d) En considérant des longueurs d'onde autour de 500 nm et en admettant que l'on peut déterminer la longueur d'onde à 0,01 nm près, avec quelle précision peut-on déterminer $n'D$?

Deuxième partie

1. L'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules isolées i de type (1) et j de type (2) placées respectivement en $\vec{r}_i$ et $\vec{r}_j$ est de la forme

$$V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\frac{C\,\alpha_1\,\alpha_2}{r_{ij}^6}$$

où C est une constante positive, $r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$, et α_1 et α_2 deux paramètres positifs caractérisant le type de molécule. Pour les applications numériques, on prendra :

$$C' = C\,\alpha_1\,\alpha_2 = 0,7 \times 10^{-77}\,\mathrm{J\,m^6}\,.$$

a) Proposer une interprétation de cette interaction en précisant la signification de α_1 et α_2. L'interaction est-elle attractive ou répulsive?

b) On suppose que l'énergie potentielle d'interaction entre une molécule de type (1) et une molécule de type (2) n'est pas modifiée par la présence d'autres molécules proches. Dans ces conditions, calculer l'énergie potentielle d'interaction d'une molécule de type (2) avec un demi-espace homogène limité par un plan situé à une distance d de la molécule de type (2) et contenant n_1 molécules de type (1) par unité de volume.

2.a) En supposant toujours valable l'hypothèse d'additivité d'interaction de paire entre deux molécules, montrer que l'énergie d'interaction par unité d'aire entre deux surfaces planes parallèles séparant deux demi-espaces semi-infinis (1) et (2), homogènes, contenant respectivement n_1 et n_2 molécules par unité de volume, est de la forme

$$E_{12}(D) = \frac{-A_{12}}{D^2}$$

où D est la séparation entre les deux surfaces ; préciser A_{12}.

b) Quel est le sens et l'expression de la force qui s'exerce par unité d'aire entre les deux surfaces?

c) Calculer A_{12} pour $n_1 = n_2 = 3 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$.

Troisième partie

Les deux éléments (lames argentées + supports) considérés dans la première partie sont supposés identiques et notés A et B. Initialement non chargés, ils sont à présent immergés dans une solution aqueuse de chlorure de sodium que l'on supposera complètement dissocié. Le comportement de ces lames dans une telle solution est complexe ; du fait de la dissociation des groupes silanol SiOH en surface qui libère des ions H^+ dans la solution, l'interface silice/solution est chargée négativement. Cela entraîne en son voisinage une redistribution des ions dans la solution conduisant à un équilibre caractérisé par une densité volumique totale de charge $\rho(\vec{r})$, un potentiel électrique $\psi(\vec{r})$, une pression $p(\vec{r})$, et une température uniforme T. On notera ψ_0 le potentiel électrique aux interfaces silice/solution ; à grandes distances on prendra $\psi(\vec{r}) = 0$ et $p(\vec{r}) = p_0$. On ne tiendra pas compte des effets de pesanteur.

1. Soient $n_+(\vec{r})$ et $n_-(\vec{r})$ les nombres d'ions respectivement positifs et négatifs par unité de volume. On admet qu'ils sont donnés par les expressions

$$n_+(\vec{r}) = n_0 \exp\left[-\frac{e\,\psi(\vec{r})}{k_B T}\right] \qquad n_-(\vec{r}) = n_0 \exp\left[+\frac{e\,\psi(\vec{r})}{k_B T}\right]$$

où n_0 est leur densité commune à grande distance.

a) Commenter les expressions de $n_+(\vec{r})$ et de $n_-(\vec{r})$. Exprimer $\rho(\vec{r})$ à l'aide de $n_+(\vec{r})$ et $n_-(\vec{r})$, puis en fonction de $\psi(\vec{r})$.

b) Écrire la condition d'équilibre local d'un élément de volume de la solution. En déduire la surpression locale $p(\vec{r}) - p_0$ en fonction de $\psi(\vec{r})$. On rappelle que :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f[g(\vec{r})] = f'[g(\vec{r})] \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, g(\vec{r})$$

2. On suppose les surfaces en regard des lames de silice planes, parallèles et distantes de D. On choisit un axe Ox perpendiculaire à ces faces, l'origine O' étant maintenant située sur l'une des faces. La distance D étant supposée très faible devant les dimensions transversales des lames, toutes les grandeurs locales ne dépendent alors que de x.

On se propose d'évaluer la force par unité de surface qui s'exerce sur l'élément A et qui est due à la présence de B (figure 3).

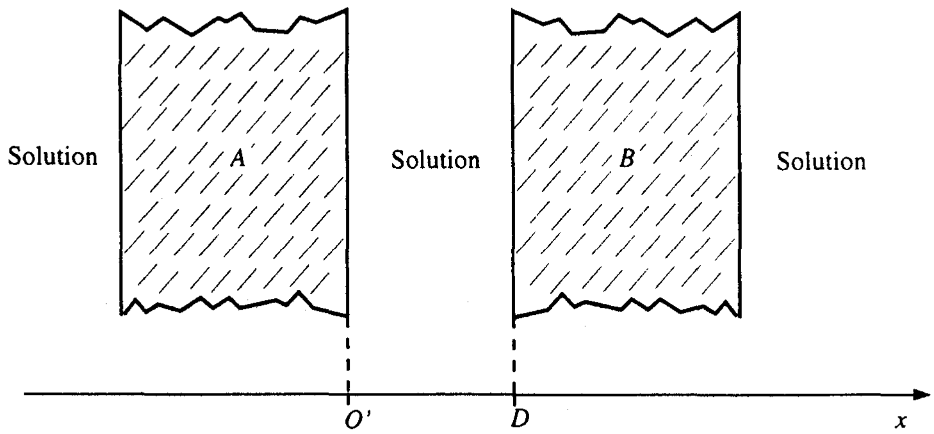

Figure 3

a) On considère d'abord un plan, seul dans l'espace, uniformément chargé avec la densité surfacique σ. Rappeler la direction et l'intensité du champ électrique qu'il crée en tout point.

b) On considère maintenant une plaque épaisse à faces parallèles chargée avec la densité volumique $\rho(x)$, l'axe Ox étant perpendiculaire à ses faces. Déterminer de même le champ électrique *à l'extérieur* de cette plaque. Préciser sa valeur dans le cas d'une plaque de charge totale nulle.

c) Montrer que, pour le système constitué par la solution et les éléments A et B immergés, la charge totale de chaque moitié (gauche pour $x < D/2$ et droite pour $x > D/2$) est nulle. Quel est alors le champ électrique exercé en tout point de la moitié gauche du système par toutes les charges de la moitié droite?

d) Utiliser les résultats antérieurs (questions **1.b** et **2.c**) pour déterminer sans calcul supplémentaire la force totale par unité d'aire exercée par la moitié droite sur la moitié gauche et transmise à l'élément A. L'exprimer à l'aide de $\psi(D/2)$ et de p_0.

e) *En dehors de la face en regard de* B, l'élément A est entouré de la solution qui subit la pression p_0 qui règne à grande distance. Quelle est la résultante des forces (par unité d'aire) qui s'exerce sur la moitié gauche ($x < D/2$) du système, et donc sur A? Cette résultante est-elle attractive ou répulsive? Que devient-elle aux grandes valeurs de D?

3. L'équation reliant le potentiel $\psi(x)$ à la densité volumique de charge $\rho(x)$ dans un milieu diélectrique de permittivité ε s'écrit : $\Delta\psi = -\rho/\varepsilon$, où Δ est l'opérateur laplacien.

a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\psi(x)$ entre les lames.

La simplifier en supposant qu'en tout point $\psi(x)$ est suffisamment faible pour pouvoir remplacer $\operatorname{sh}(e\,\psi/k_BT)$ par $e\,\psi/k_BT$. On posera :

$$a = \left(\frac{2\,n_0\,e^2}{\varepsilon\,k_B\,T}\right)^{\frac{1}{2}}$$

b) Résoudre l'équation obtenue pour $0 < x < D$ sachant qu'aux interfaces entre la lame de silice et la solution le potentiel prend la valeur ψ_0.

c) Exprimer alors $\psi(D/2)$ en fonction de ψ_0, a et D.

d) En déduire la force par unité d'aire qui s'exerce sur l'élément A.

4. La solution de NaCl contient 10^{-4} mole/litre, soit 6×10^{19} ions de chaque espèce par litre. On donne $|\psi_0| = 25$ mV et $\varepsilon/\varepsilon_0 = 80$.

a) On néglige dans le calcul de n_0 les ions H^+ et OH^- de la solution. Cela vous paraît-il réaliste?

b) Calculer numériquement a^{-1} pour $T = 290$ K. Les approximations effectuées en **3.a)** sont-elles justifiées?

c) Tracer l'allure du graphe de la force par unité d'aire qui s'exerce sur A en fonction de D.

Quatrième partie

On étudie maintenant le fonctionnement de l'appareil représenté sur la figure 1. On suppose que l'interaction entre les surfaces ne devient détectable que pour des séparations $D < 500$ nm. On prendra la tension U égale à zéro lorsque $D = D_0 = 700$ nm. Par rapport à cette position initiale, le déplacement de l'élément supérieur A est alors donné par $X_A = \alpha U$. Comme valeurs typiques, on donne $\alpha = 1$ nm/V et $K = 50$ N/m.

1. On note $F(D)$ la force totale qui s'exerce entre les surfaces. En explicitant la condition d'équilibre de l'élément inférieur B, exprimer U en fonction de D, D_0, $F(D)$, α et K. Tracer l'allure de la courbe $U(D)$ dans les cas successifs où la force totale d'interaction $F(D)$ entre les surfaces est (a) purement répulsive, (b) purement attractive. A quelles situations physiques décrites dans le problème ces cas correspondent-ils? Proposer une méthode graphique pour la détermination de $F(D)$.

2. Dans le montage expérimental, les surfaces ne sont pas planes mais courbes. Le calcul de la force utilise les résultats précédents en faisant intervenir une surface effective. On admettra que dans le cas d'une interaction élémentaire en $1/r^6$ (deuxième partie), cette surface puisse être prise égale à πRD, où R correspond à un rayon de courbure que l'on prendra égal à 2 cm. Dans le cas traité dans la troisième partie, cette surface effective est prise égale à $\pi R/a$. Jusqu'à quelle distance D les forces étudiées dans ce problème peuvent-elles être mesurées par cet appareil sachant que sa sensibilité est de 10^{-7} N ?

* *
*