ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 1997 OPTION **PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 3 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

***

Atténuation du son par le brouillard

L'objet de ce problème est de présenter un modèle visant à interpréter l'atténuation des ondes sonores par le brouillard. Dans le cadre de ce modèle, les gouttelettes d'eau formant le brouillard seront considérées comme des particules solides. Dans une première partie, on évalue la force de frottement s'exerçant sur un objet plan qui se déplace dans un gaz. La seconde partie est consacrée à l'étude de l'atténuation du son. Ces deux parties sont très largement indépendantes.

Données numériques

Masse molaire de l'air	:	$M_A = 29 \times 10^{-3}$ kg mol^{-1}
Constante de Boltzmann	:	$k_B = 1,4 \times 10^{-23}$J K^{-1}
Nombre d'Avogadro	:	$\mathcal{N}_A = 6,0 \times 10^{23}$
Viscosité de l'air	:	$\eta = 1,7 \times 10^{-5}$ kg m^{-1} s^{-1}

Première partie

Dans cette partie, nous allons étudier l'action des molécules d'un gaz sur les faces d'une plaque solide à l'aide d'une théorie cinétique. Les molécules, toutes identiques, de masse m_g, sont au nombre de n_g par unité de volume. La grandeur d'intérêt étant la composante de leur vitesse perpendiculaire aux faces de la plaque, on adopte le modèle suivant :

• dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, les molécules ne se déplacent que selon une direction fixe que l'on prendra comme axe Ox ; de plus elles n'ont que deux vitesses possibles : $V_0\,\vec{e_x}$ et $-V_0\,\vec{e_x}$ avec égale probabilité, le gaz étant à l'équilibre thermique.

• la plaque se déplace dans $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{u} = u\,\vec{e_x}$; ses faces A et B, de surface S, restent perpendiculaires à Ox, cet axe étant orienté de A vers B. On suppose que l'on a toujours $|u| < V_0$.

• les molécules incidentes sur la plaque ont la distribution de vitesses ci-dessus ; elles se collent alors sur la plaque.

• ces molécules sont réémises ultérieurement avec la même distribution mais dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de la plaque (vitesse $\pm V_0\,\vec{e_x}$ dans $\mathcal{R}'$) ; en régime permanent, le flux émis est égal au flux incident.

1. On s'intéresse à la face A de la plaque.

a) Évaluer le flux Φ_A de particules incidentes sur cette face, c'est-à-dire le nombre de collisions par unité de temps (on déterminera tout d'abord le volume qui contient ces molécules en effectuant le calcul dans $\mathcal{R}'$).

b) Évaluer la variation, par unité de temps, de la quantité de mouvement des particules incidentes; soit $P_A^{(1)}$.

c) Évaluer la grandeur correspondante $P_A^{(2)}$ pour les particules réémises par la face A.

d) En déduire que la force pressante exercée par les molécules du gaz sur la face A est donnée par :

$$F_A = \frac{1}{2} n_g \, S \, m_g (V_0 - u)(2V_0 - u)$$

2.a) Déterminer de façon semblable la force F_B exercée par les molécules du gaz sur la face B.

b) Déduire des calculs précédents que la force totale F exercée sur la plaque est du type visqueux : $F = -\alpha \, u$, avec un coefficient α que l'on précisera.

3. Soit P_0 la pression du gaz s'exerçant sur chaque face d'une plaque au repos.

a) Déterminer P_0. Exprimer α en fonction de P_0, S et V_0.

b) La formule de Stokes donne la force de frottement qu'exerce en écoulement laminaire un fluide visqueux sur une sphère de rayon R : $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{u}$, où η est le coefficient de viscosité du fluide. Quelle différence importante relevez-vous entre cette expression et le résultat de votre calcul ?

c) Une hypothèse fondamentale du calcul précédent est que le gaz est dans $\mathcal{R}$ toujours en équilibre thermique et globalement au repos. En comparant le libre parcours moyen $\bar{l}$ des molécules à R ou $S^{1/2}$, préciser la condition nécesssaire pour la validité de ce calcul.

Soit $\sigma = 10^{-20}$ m^2 la section efficace de diffusion des molécules du gaz. La condition sur $\bar{\ell}$ est-elle satisfaite pour des gouttelettes de rayon $R = 1\mu$m dans un gaz à la température de 300 K sous la pression de 10^5 Pa ?

d) On pose $V_{th} = \sqrt{k_B T / m_g}$ où k_B est la constante de Boltzmann. Comment choisir V_0 pour que la pression P_0 soit celle d'un gaz parfait à la température T ?

Deuxième partie

Dans un gaz parfait constitué de molécules de masse m_g au nombre de n_g par unité de volume, sont suspendues des gouttelettes que l'on suppose toutes identiques de masse m_p au nombre de n_p par unité de volume. Dans toute la suite du problème, une gouttelette se déplaçant à la vitesse $\vec{u}$ par rapport au gaz est soumise à une force visqueuse :

$$\vec{f} = -\beta \frac{S P_0}{V_{th}} \vec{u}$$

où P_0 est la pression du gaz, S la surface apparente perpendiculaire à $\vec{u}$ d'une gouttelette. $V_{th} = \sqrt{k_B T / m_g}$ et β un coefficient voisin de 1.

Une onde sonore se propage dans ce milieu. Les déplacements et les vitesses sont tous selon Ox. On note :

- $\delta x_g(\vec{r}, t)$ le déplacement d'un élément du gaz et $v_g(\vec{r}, t)$ sa vitesse,
- $j_g(\vec{r}, t)$ la densité de courant de masse du gaz, $\delta\rho_g(\vec{r}, t)$ la variation de sa masse volumique et $\delta P(\vec{r}, t)$ celle de sa pression,
- $\delta x_p(\vec{r}, t)$ le déplacement d'une gouttelette et $v_p(\vec{r}, t)$ sa vitesse.

Pour une onde sinusoïdale, toutes ces grandeurs sont en représentation complexe de la forme $A \exp[i(kx - \omega t)]$ où A est une amplitude complexe. On utilisera pour A le même symbole que pour la grandeur mise en jeu. Par exemple : $\delta x_g(\vec{r}, t) = \delta x_g \exp[i(kx - \omega t)]$.

1.a) Écrire la relation qui exprime la conservation de la masse du gaz.

b) Justifier que $j_g \simeq \rho_g^0 v_g$ où $\rho_g^0 = n_g m_g$ est la masse volumique du gaz au repos.

c) En déduire en fonction de $\delta x_g, \omega, k$ et ρ_g^0 les valeurs des amplitudes de j_g et $\delta\rho_g$.

d) A quelle inégalité sur δx_g conduit l'hypothèse $|\delta\rho_g| \ll \rho_g^0$?

2. L'onde sonore se propage par évolution adiabatique réversible du gaz. Montrez que $\delta P = \gamma V_{th}^2 \delta\rho_g$, où $\gamma = C_p/C_v$.

3.a) Écrire l'équation du mouvement d'une gouttelette.

b) En déduire une relation entre les amplitudes complexes δx_g et δx_p.

c) On pose $\tau = m_p V_{th} / \beta P_0 S$. Donner une interprétation physique de ce coefficient. Expliquer simplement les deux régimes limites correspondant aux faibles et aux fortes valeurs de ω.

d) Montrez que la force par unité de volume que les gouttelettes exercent sur le gaz est donnée, en posant $\rho_p = n_p m_p$, par :

$$f_g = \rho_p \frac{\omega^2}{1 - i\omega\tau} \delta x_g \, .$$

4.a) Écrire l'équation du mouvement d'un élément du gaz, en tenant compte de la force de frottement et en la linéarisant, c'est-à-dire en ne gardant que les termes du premier ordre en v_g. Interpréter cette linéarisation en comparant v_g à ω/k.

b) En ne gardant que δx_g comme inconnue, montrer que k et ω sont reliés par :

$$v_s^2 k^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{\rho_p / \rho_g^0}{1 - i\omega\tau}\right)$$

où v_s est la vitesse du son dans le gaz à la température T.

c) Que signifie le fait que pour ω réel k ait une partie imaginaire non nulle?

d) L'onde se propage dans le sens des x croissants. On pose $k = k' + i\,k''$. Préciser en les interprétant les signes de k' et de k''.

5. On suppose $\rho_p/\,\rho_g^0 \ll 1$.

a) Déterminer dans ce cas k' et k'' à l'ordre le plus bas en $\rho_p/\,\rho_g^0$.

b) Représenter par un graphe l'allure de k'' en fonction de ω. Pour quelles fréquences la distance caractéristique d'atténuation est-elle la plus faible?

6. Le gaz est de l'air à 300 K, à la pression de 10^5 Pa.

a) Calculer la valeur de τ pour une gouttelette d'eau sphérique de rayon 1μm et de masse volumique 1g/cm^3 en prenant $\beta = 1$. Comment varie τ avec R?

b) Un brouillard contient par litre $n_p = 10^9$ gouttelettes de rayon $R = 1\ \mu$m. Calculer $\rho_p/\,\rho_g^0$ puis la valeur de k'' pour la fréquence de 1 000 Hz. Pour cette fréquence, calculer la distance caractéristique de cette atténuation.

7. Pour de plus grosses gouttelettes, la force de frottement sera mieux représentée par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\pi\eta\, R\, \vec{u}$ (cf première partie, **3.b**)).

a) Comment l'emploi de cette expression modifie-t-il le modèle théorique précédent?

b) Calculer la nouvelle constante de temps caractéristique pour des gouttelettes de rayon $R = 10\,\mu$m. Comment dépend-elle de R?

c) Pour la valeur de ρ_p/ρ_g^0 obtenue en **6.b**), mais pour des gouttelettes de rayon $R = 10\,\mu$m, calculer les distances caractéristiques d'atténuation de ce brouillard pour les fréquences de 1 000 Hz et de 100 Hz. Quelles conclusions cela vous suggère-t-il?

★★
★