A 98 PHYS. I

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

PREMIÈRE DE PHYSIQUE

Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à disposition du concours ENTPE suite à l'arrêté du 09 décembre 1997

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I -PC

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 8 pages.

• Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

• Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

• Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

OSCILLATEURS ET AMPLIFICATEURS PARAMÉTRIQUES

Introduction : facteur de qualité d'un circuit oscillant

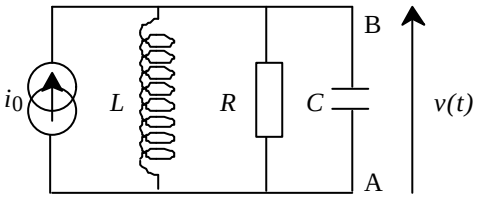


Fig. 1 : circuit oscillant

Le circuit oscillant de la figure 1 est alimenté par une source de courant sinusoïdal d'intensité $i_0 = I_0\sqrt{2}\cos(wt)$.

❑ **1** – Déterminer le maximum de la valeur efficace V de la tension v aux bornes du circuit et la pulsation w_0 pour laquelle cette tension, V_{max}, est atteinte.

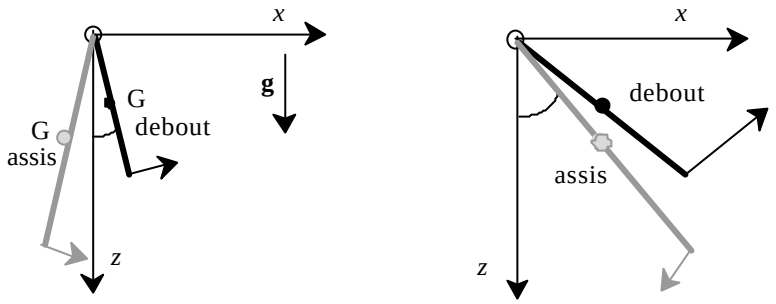
❑ **2** – Tracer la courbe de variation de V avec la pulsation w du signal appliqué. Préciser la largeur de la courbe de réponse, définie par $\Delta w = w_1 - w_2$, w_1 et w_2 étant les pulsa-

tions pour lesquelles $V = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$. Exprimer, en fonction de L, w_0 et R le *coefficient de qualité* du circuit, défini par $Q = \frac{w_0}{\Delta w}$. Interpréter qualitativement le résultat obtenu.

❑ **3** – *Application numérique.* Calculer $|Z|$ à la résonance pour $R = 10\ \text{k}\Omega$, $Q = 100$ et $w_0 = 2 \times 10^6\ \text{rad.s}^{-1}$.

Oscillation paramétrique

Le processus de l'interaction paramétrique est bien connu des enfants qui, sur une balançoire, font varier deux fois par période la distance entre le centre de gravité du pendule (constitué de la balançoire et de l'enfant) et la suspension de la balançoire. Deux fois par cycle (fig. 2), de l'énergie est ainsi fournie au pendule et l'amplitude des oscillations augmente. On peut utiliser le même principe pour au contraire arrêter la balançoire : il suffit de synchroniser différemment les oscillations et les variations de distance.



Passage par $\theta = 0$ (gauche $\rightarrow$ droite)

Passage par $d\theta / dt = 0$ (droite $\rightarrow$ gauche)

Fig. 2 : modélisation de la possibilité que l'on a d'accroître l'amplitude des oscillations d'une balançoire. Accroupi en $\theta = 0$, on se redresse de manière à arriver debout en $\theta = \theta_{max}$, puis on fléchit les jambes pour arriver accroupi en $\theta = 0$, et ainsi de suite. Dans un modèle simplifié, on ne considère que deux positions, représentées par une barre de masse M, de longueur l_D en phase (D) et de longueur l_A en phase (A). On néglige ainsi les durées de changement de position $(\text{A}) \leftrightarrow (\text{D})$.

L'amplification paramétrique en électronique a vu le jour dans les années 1950, en liaison avec la réalisation d'amplificateurs à très bas bruit. L'analogue en est un circuit *LC* dont la capacité change avec le temps : dans le *circuit à capacité variable* représenté à la figure 3, la charge du condensateur, q, circulant dans ce système à l'instant t satisfait l'équation $L\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$; si L et C étaient constants $(C = C_0)$, alors le système oscillerait avec la pulsation propre $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$. Nous étudions dans ce problème les phénomènes reliés à une variation périodique de C.

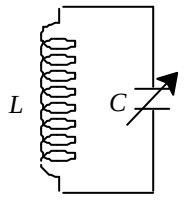


Fig. 3 : circuit à capacité variable

- *Un exemple simple, traitement qualitatif*

On considère un condensateur plan idéal dont on fait varier la capacité selon la loi de

variation en créneaux périodique donnée par la figure 4 (on peut imaginer un condensateur plan idéal dont on fasse varier la distance entre armatures) :

❑ **1** – La distance entre les armatures augmente brutalement chaque fois que la tension aux bornes de la capacité, $u_C(t)$, est maximale ; elle diminue brutalement lorsque cette tension est nulle. Montrer que ce « *pompage* » conduit à une augmentation de la tension maximale aux bornes du condensateur et du courant qui le traverse. Représenter sur le même graphe l'allure de $C(t)$ et de $u_C(t)$. On pourra supposer $q(0^-) = q_0 > 0$ et $\frac{dq}{dt}(0^-) = 0$. Quelle devrait être l'action de l'opérateur pour que, au contraire, la tension aux bornes du condensateur tende vers 0 ?

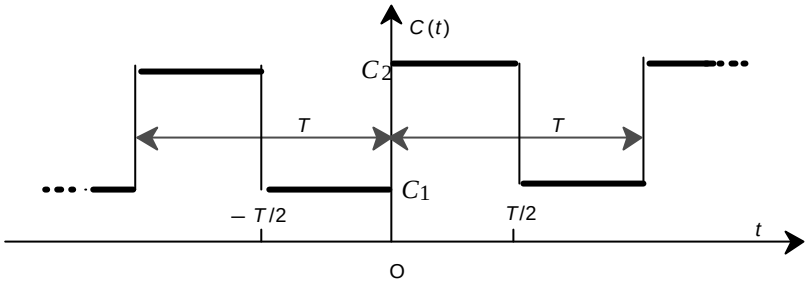


Fig. 4 : variations en créneaux de la capacité

- *Le même exemple simple, traitement graphique élémentaire*

L'équation différentielle décrivant la charge est $\frac{d^2q}{dt^2} + w^2(t)q(t) = 0$, avec :

$$\begin{cases} -\frac{T}{2} < t < 0, \quad q(t) = q_1(t) \quad w^2(t) = w_1^2 = \frac{1}{LC_1} = \left(\frac{2p}{T_1}\right)^2 \\ 0 < t < \frac{T}{2}, \quad q(t) = q_2(t) \quad w^2(t) = w_2^2 = \frac{1}{LC_2} = \left(\frac{2p}{T_2}\right)^2 \end{cases} \qquad C_1 = r^2 C_2, \quad 0 < r < 1$$

Soient les variables adimensionnées $u = w_1 t$ et $w_1 T = U = 2a$. Soient aussi A, B, C et D les constantes telles que, pour $-\frac{U}{2} < u < 0$, la solution s'écrive $q_1(u) = A\cos u + B\sin u$ et que, pour $0 < u < \frac{U}{2}$, elle s'écrive $q_2(u) = C\cos(ru) + D\sin(ru)$.

❑ **2** – Anticipant sur l'étude qui sera faite dans les questions (10-15), on admet l'existence d'une constante l, réelle ou imaginaire pure, telle que, pour $\frac{U}{2} < u < \frac{3U}{2}$, l'expression de q est

$$q_3(u) = (\exp lU)\left[A\cos(u - U) + B\sin(u - U)\right] \qquad [1]$$

❑ **3** – En considérant les continuités de la fonction q, établir la *relation de liaison* :

$$\cosh(2l\,a) = (\cos a)\cos ra - \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)(\sin a)\sin ra \qquad [2]$$

❑ **4** – La relation [2] donne les valeurs de l si $a = \frac{w_1 T}{2}$ et $r = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ sont donnés. Une étude graphique permet alors de décrire qualitativement les solutions ; effectuer sommairement cette étude, en s'appuyant sur la figure 5.

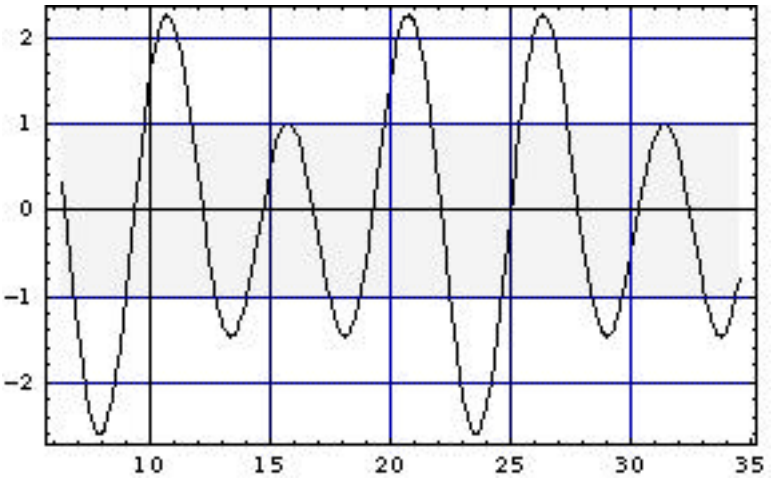


Fig. 5 : graphe de $F_{0,2}(a) = (\cos a)\cos(0,2a) - 2,6(\sin a)\sin(0,2a)$ $(r = 0,2)$.

- *Un exemple moins simple, traitement qualitatif*

La capacité (fig. 3 et 4) varie selon la loi $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1}\cos w_c t$, avec $C_0 < C_1$. Posant $y = q$, $x = \frac{1}{2} w_c t$, $h = \frac{4}{L C_0 w_c^2} = \frac{4 w_0^2}{w_c^2}$ et $g = \frac{4}{L C_1 w_c^2} = \frac{4 w_1^2}{w_c^2}$, on obtient la forme canonique de l'équation, dite de Mathieu :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (h + g\cos 2x)y = 0 \qquad [3]$$

Supposons le condensateur plan idéal et conçu de telle manière que l'on puisse modifier la distance e entre ses armatures selon la loi $e = e_0 + e_1 \cos w_c t$, avec $e_1 << e_0$; soit S la surface commune des armatures : on a $\frac{1}{C} = \frac{e}{e_0 S}$ et on rappelle que la force qui s'exerce entre les armatures est $F = \frac{q^2}{2C e} = \frac{q^2}{2 e S}$.

❑ **5** – Justifier que les oscillations de la charge dans ce circuit auront une pulsation très voisine de w_0 ; on posera $q \approx q_0 \cos(w_0 t + j)$.

❑ **6** – Exprimer *W*, travail fourni dans une oscillation par l'opérateur qui produit la variation de distance et montrer que ce travail ne prend de valeur significative que pour $w_c = 2w_0$. On donne

$$\int (\sin a\,x)(\cos b\,x + j)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} -\dfrac{\cos\left[(a-b)x - j\right]}{2(a-b)} - \dfrac{\cos\left[(a+b)x + j\right]}{2(a+b)} & a^2 \neq b^2 \\ -\dfrac{x}{2}\sin j - \dfrac{\cos(2a\,x + j)}{4a} & a = b \end{cases}$$

❑ **7** – Décrire les phénomènes selon que *W* est positif ou négatif. Justifier le nom de *résonance paramétrique* donné au phénomène quand $\sin 2j$ est positif.

• *Le même exemple moins simple, approche empirique, s'appuyant sur l'étude précédente*

L'équation étudiée étant mise sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + w_0^2\left(1 + \frac{w_1^2}{w_0^2}\cos w_c t\right)u(t) = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\,t^2} + w^2(t)u(t) = 0 \qquad [4]$$

sachant maintenant que la résonance paramétrique apparaît avec une intensité maximale lorsque la pulsation du terme oscillant de la fonction $w^2(t)$ est voisine de $2w_0$, nous poserons donc $w_c = 2(w_0 + e)$, avec $e << w_0$ et chercherons la solution sous la *forme approchée*

$$u(t) \approx a(t)\cos(w_0 + e)t + b(t)\sin(w_0 + e)t \qquad [5]$$

Les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ sont réputées varier dans le temps bien plus lentement que les facteurs cos et sin. On suppose aussi que $\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,t}$ et $\frac{\mathrm{d}\,b}{\mathrm{d}\,t}$ sont du premier ordre en e, c'est-à-dire que $\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,t} \propto e\,a$ et $\frac{\mathrm{d}\,b}{\mathrm{d}\,t} \propto eb$. La validité de cet ensemble d'hypothèses sera confirmée par le résultat. On établit à la suite de ces hypothèses l'équation différentielle suivante :

$$-\left(2\frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,t} + 2be + \frac{w_1^2}{2w_0}b\right)w_0\sin(w_0 + e)t + \left(2\frac{\mathrm{d}\,b}{\mathrm{d}\,t} - 2ae + \frac{w_1^2}{2w_0}a\right)w_0\cos(w_0 + e)t = 0 \quad [6]$$

❑ **8** – L'égalité [6] exige que les fonctions $a(t)$ et $b(t)$ satisfassent un système différentiel linéaire et homogène ; donner ce système et en déduire que la résonance paramétrique a lieu dans l'intervalle $-\frac{w_1^2}{4w_0} < e < \frac{w_1^2}{4w_0}$ autour de $2w_0$.

• *Toujours le même exemple moins simple, approche physico-mathématique, s'appuyant sur la symétrie et sur une représentation graphique*

La fonction $w^2(t) = w_0^2 + w_1^2\cos w_c t$ introduite dans l'équation [4] est périodique de

période T_c ; cette équation est invariante par rapport à la transformation $t \to t + T_c$; si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de [4], alors elles se transforment nécessairement linéairement l'une dans l'autre lorsque l'on remplace *t* par $t + T_c$.

❑ **9** – Montrer qu'il est généralement possible de choisir $u_1(t)$ et $u_2(t)$ de telle manière que $u_1(t + T_c) = m_1 u_1(t)$ et $u_2(t + T_c) = m_2 u_2(t)$, les nombres m peuvent alors se comprendre comme les valeurs propres de l'opérateur translation dans le temps.

❑ **10** – On pose $u_i(t) = P_i(t)(m_i)^{\frac{t}{T_c}}$, $i = 1, 2$; quelle est la propriété des fonctions $P_i(t)$?

❑ **11** – Montrer à partir de l'équation [4] que $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} u_2 - u_1 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \mathrm{C^{te}}$ et en déduire

$$m_1 m_2 = 1 \qquad [7]$$

❑ **12** – Les coefficients de l'équation [4] sont réels ; déduire de ce fait que : soit les coefficients m sont l'un et l'autre complexes et de module égal à l'unité, soit les coefficients m sont l'un et l'autre réels et inverses l'un de l'autre. (Une manière d'établir ce résultat utilise le fait que le couple (m_1, m_2) est identique au couple (m_1^*, m_2^*) des conjugués).

❑ **13** – Pourquoi, dans le second des cas envisagés à la question 12, peut-on affirmer que la position d'équilibre est instable ? Ce phénomène est appelé *résonance paramétrique*.

Il convient de déterminer les valeurs numériques des coefficients m associés à un jeu donné de coefficients h et g, tels qu'ils apparaissent dans l'équation [2] ; c'est un problème difficile, dont un résultat partiel est représenté sur la figure 6.

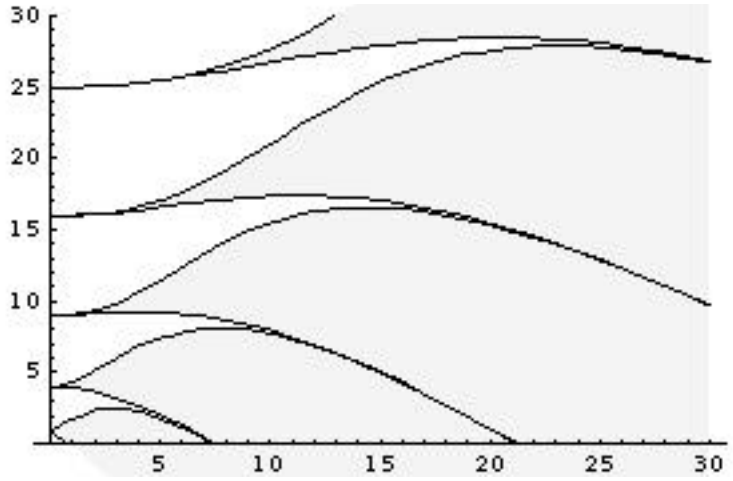


Fig. 6 : Quelques *séparatrices* de l'équation de Mathieu ; γ est en abscisse et η en ordonnée ; de chaque point d'ordonnée $a_n = 1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ de l'axe des ordonnées partent deux courbes. Les points situés à l'intérieur des régions grisées correspondent à des valeurs réelles de λ (*cf.* éq. [2]) ; ailleurs, λ est imaginaire pur et les solutions restent bornées. Le problème étudie des phénomènes associés au voisinage du point (0,1) du plan.

La première région d'instabilité a une forme de V, au voisinage du point de coordonnées (1,0) dans le plan (h, g).

❑ **14** – En se reportant à la définition de h (et en supposant bien sûr $g \neq 0$), montrer que ce cas correspond effectivement à la condition d'amplification paramétrique $w_c = 2w_0$. Montrer que, sous certaines conditions, le système se comporte comme un oscillateur paramétrique, dont on interprétera les paramètres caractéristiques.

Quelques autres exemples d'oscillateurs paramétriques

❑ **15** – Modélisez le système de votre choix de la fig. 7 (fonctionnement en régime forcé). Vous pouvez aussi bien en imaginer un autre.

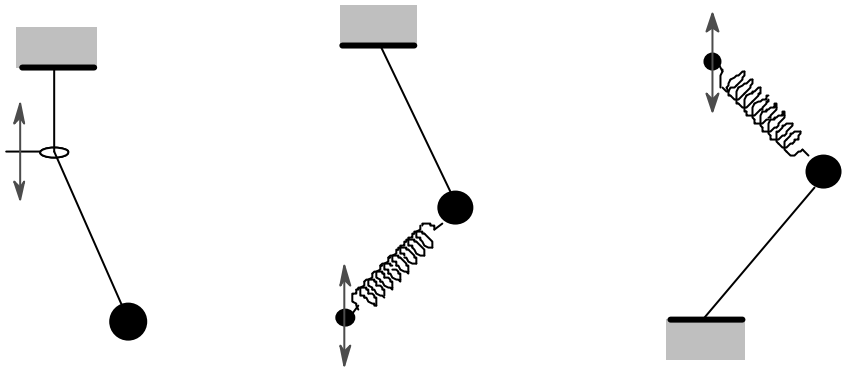


Fig. 7 : quelques exemples d'oscillateurs mécaniques (d'après L. Brillouin) ; les flèches symbolisent un mouvement rectiligne périodique.

Équivalence entre circuit à capacité variable et milieu diélectrique non linéaire

Le condensateur des questions précédentes est géométriquement fixe, mais on suppose maintenant que l'espace entre ses armatures est occupé par un diélectrique dans lequel la relation entre le vecteur polarisation électrique **P** et le champ électrique **E** n'est pas linéaire ; les non linéarités se manifestent généralement pour des intensités suffisamment élevées ; dans un modèle unidimensionnel permettant d'éliminer les complications mathématiques non essentielles ici, la relation (*P*, *E*) peut s'écrire

$$P = e_0 cE + b E^2 \qquad [8]$$

où b est un certain coefficient. La relation générale liant les vecteurs induction **D** à **P** et **E**, $\mathbf{D} = e_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = e\mathbf{E}$ définit la « constante diélectrique », e, du milieu ; cette dernière dépend en réalité du champ E et $e = e(E)$.

❑ **16** – Montrer que $e = e_0(1 + c) + b E$ et exprimer la capacité C en fonction de la distance e entre les armatures, la surface S de ces dernières, l'intensité E du champ électrique et les constantes e_0, c et b. On admettra la relation $C = e\dfrac{S}{e}$.

❑ **17** –Donner l'expression de la capacité dans le cas où le champ électrique est modulé selon la loi $E = -E_0 \cos w_c t$. Établir ensuite l'équivalence entre d'une part le processus paramétrique, où le paramètre d'emmagasinement de l'énergie (la capacité) est

modulé, d'autre part le processus non linéaire, où les propriétés du milieu dépendent du champ appliqué. Voyez-vous une application possible du phénomène d'amplification paramétrique dans le domaine optique (une suggestion suffira) ?

Généralisation : esquisse de l'étude d'un circuit réel

On considère (fig. 8, qui précise les signes) deux circuits résonants de facteurs de qualité suffisamment élevés pour que l'on puisse considérer que, excités hors de la résonance $\left(L_1C_1\omega_1^2 = 1 \text{ et } L_2C_2\omega_2^2 = 1\right)$, ils se comportent pratiquement comme des courts-circuits. Ils sont couplés entre eux par une source de tension sinusoïdale $e(\omega_3) = E_3\cos(\omega_3 t + \varphi_3)$, avec $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, et un condensateur de capacité $C(u)$ dépendant de la tension à ses bornes selon la loi $C(u) = \frac{C_3}{E_3}u$, ce qui définit le paramètre C_3 (la loi de variation $C(u) = C_0 + au$ serait plus réaliste, mais on ne tient pas compte ici des effets linéaires dus à C_0). On suppose que seuls les signaux de pulsation ω_1, ω_2 et ω_3 sont présents dans le circuit ; pratiquement, les tensions sont limitées à $v_1(t) = v(\omega_1) = V_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $v_2(t) = v(\omega_2) = V_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

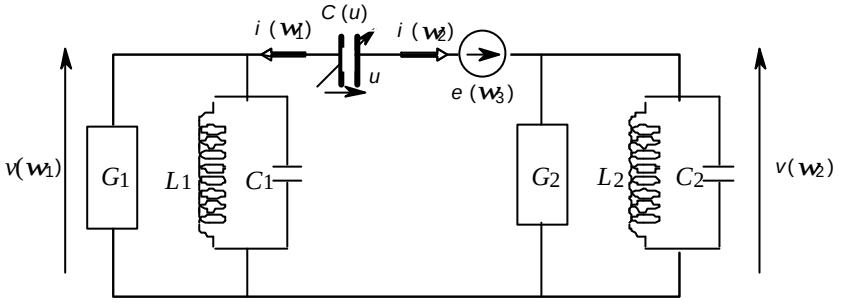


Fig. 8 :modèle d'amplificateur paramétrique ; pour la source de tension à la pulsation ω_1 (qui n'a pas été représentée), les courants sont comptés positivement lorsqu'ils remontent les potentiels.

❑ **18** –Donner sous la forme $i(\omega_j) = I_j\cos(\omega_j t + \varphi_j)\,(j = 1, 2)$, les expressions respectives des composantes des courants de pulsation ω_1 et ω_2 traversant le condensateur.

❑ **19** – On associe à toute grandeur sinusoïdale $x = x_0\cos(\Omega t + \psi)$ sa représentation complexe $x = \mathrm{Re}\left[(x_0\exp i\psi)\exp i\Omega t\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{X}_0\exp i\Omega t\right]$. Pour l'oscillateur n°1, le reste du circuit peut être décrit par une *admittance équivalente* $\underline{Y}_1 = \frac{\underline{I}_1}{\underline{V}_1}$. Montrer que le reste du circuit présente alors une conductance négative $Y(\omega_1) = -\frac{\omega_1\omega_2(C_3)^2}{G_2} = -G$. Définir de la même manière la conductance vue de l'oscillateur n° 2.

❑ **20** –Une charge de conductance G_c est branchée aux bornes de l'oscillateur n°1 ; montrer que si $G = G_1 + G_c$, les deux oscillateurs oscillent simultanément à leurs fréquences de résonance respectives.

FIN DE CE PROBLÈME
FIN DE L'ÉPREUVE