

SESSION 2003

---

Filière PC

---

**PHYSIQUE**

ENS de Paris

---

Durée : 6 heures

---

*L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.*

Il est conseillé d'aborder les différentes parties du problème dans leur ordre d'apparition.

Le candidat est prié d'accorder une importance particulière aux applications numériques.

**Tournez la page S.V.P.**

La propagation d'une impulsion lumineuse dans un gaz atomique peut s'effectuer à une vitesse très différente de  $c \simeq 3 \times 10^8$  m/s, vitesse de la lumière dans le vide, lorsque la fréquence du champ lumineux est proche de celle d'une transition atomique. Ceci a fait l'objet ces dernières années d'expériences spectaculaires. Ainsi, le groupe de Lene Hau à l'Université de Harvard a observé en 1999 la propagation d'une impulsion lumineuse dans une vapeur d'atomes de sodium à une vitesse moyenne de 17 m/s.

L'objectif du problème est de rendre compte de ces vitesses inhabituelles de propagation à partir du modèle de l'électron élastiquement lié traditionnel, puis d'une variante du modèle permettant de prendre en compte le fait que non pas deux, mais trois niveaux atomiques sont mis en jeu dans l'expérience de Lene Hau.

Dans tout le problème, on repère l'espace réel par les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et l'on appelle  $\mathbf{e}_j$ ,  $j = x, y, z$  les vecteurs unitaires correspondants. Les vecteurs sont notés en caractères gras. La notation c.c. signifie "complexe conjugué". On néglige totalement la force de pesanteur.

## 1 Calcul de la polarisabilité d'un atome à deux niveaux

Dans cette partie, on suppose que le champ électromagnétique appliqué excite une seule transition atomique. On décrit la réponse d'un atome neutre à l'excitation électromagnétique par le modèle de l'électron élastiquement lié, et on en déduit la polarisabilité  $\alpha$  de l'atome.

### 1.1 Equations du mouvement

Le noyau de l'atome est au repos au point  $\mathbf{R}$ , que l'on suppose pour simplifier être à l'origine des coordonnées,  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ . L'électron, de charge  $q$  et de masse  $m$ , a un vecteur position  $\mathbf{u}$  par rapport au noyau. Il est soumis à une force de rappel  $-m\omega_0^2\mathbf{u}$  et à une force de friction  $-m\Gamma d\mathbf{u}/dt$ . On suppose dans tout le problème que  $\Gamma \ll \omega_0$ .

- a) Exposer brièvement l'origine physique de ces deux forces et la signification physique des constantes  $\omega_0$  et  $\Gamma$ .
- b) Quelle est la valeur stationnaire du vecteur position  $\mathbf{u}$  de l'électron dans ce modèle, en l'absence de champ excitateur? Donner un ordre de grandeur de la taille réelle  $a_0$  d'un atome, par exemple l'atome d'hydrogène. Quelle est la signification physique de  $\mathbf{u}$  ?
- c) On envoie sur l'atome une onde électromagnétique monochromatique de pulsation  $\omega$ . On suppose que la force exercée par le champ magnétique sur l'électron est négligeable par rapport à la force exercée par le champ électrique. A quelle condition sur la vitesse de l'électron cette hypothèse est-elle justifiée ? Cette condition est-elle satisfaite pour un atome réel comme l'atome d'hydrogène ?
- d) On suppose de plus que le champ électrique ressenti par l'électron peut être approximé par le champ électrique régnant au point  $\mathbf{0}$ , que l'on notera  $\mathbf{E}(\mathbf{0}, t)$ . A quelle condition sur la pulsation  $\omega$  et sur la taille de l'atome  $a_0$  cette approximation est-elle justifiée ?
- e) En déduire une équation du mouvement approchée pour  $\mathbf{u}$ .

## 1.2 Régime forcé

On écrit le champ électrique précédent à l'aide de la notation complexe suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (1)$$

où  $\mathbf{E}_0$  est un vecteur à composantes complexes indépendantes du temps. On cherche un régime forcé à l'équation du mouvement sur  $\mathbf{u}$  de la forme

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (2)$$

où  $\mathbf{u}_0$  est un vecteur à composantes complexes indépendantes du temps.

- a) Exprimer  $\mathbf{u}_0$  en fonction de  $\mathbf{E}_0$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $\Gamma$ .
- b) En déduire la valeur du moment dipolaire électrique  $\mathbf{p}$  de l'atome en régime forcé, que l'on mettra sous la forme

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

où  $\mathbf{p}_0$  est un vecteur à composantes complexes indépendantes du temps.

- c) On rappelle que la polarisabilité  $\alpha(\omega)$  de l'atome à la pulsation  $\omega$  est telle que

$$\mathbf{p}_0 = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}_0 \quad (4)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide. Donner la valeur de  $\alpha$  en fonction de  $q$ ,  $m$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\Gamma$ ,  $\omega$  et  $\omega_0$ .

- d) On suppose dans toute la suite que  $\omega$  est très proche de  $\omega_0$  :

$$|\delta| \ll \omega_0 \quad \text{avec} \quad \delta \equiv \omega - \omega_0 \quad (5)$$

où  $\delta$  est appelé traditionnellement 'désaccord'. En revanche, on notera que  $\delta$  et  $\Gamma$  peuvent être du même ordre de grandeur. En déduire une expression simplifiée de  $\alpha$  faisant intervenir  $\omega_0$  et  $\delta$  mais plus  $\omega$ . On pensera à utiliser une simplification de ce type dans toute la suite.

- e) Quelle est la puissance moyenne  $P_{\text{fr}}$  de la force de friction subie par l'électron ? Exprimer  $P_{\text{fr}}$  en fonction de  $\omega_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $m$ ,  $\Gamma$ ,  $q$ ,  $\mathbf{E}_0$  et  $|\alpha|$ .
- f) On suppose qu'on a branché brutalement le champ électromagnétique. Donner l'ordre de grandeur du temps au bout duquel le mouvement de l'électron atteint le régime forcé.

## 1.3 Champ rayonné par l'atome

On appelle respectivement  $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$  les champs électrique et magnétique rayonnés par l'atome en un point  $\mathbf{r}$  quelconque de l'espace. On suppose que le mouvement de l'électron est en régime forcé.

- a) Pourquoi s'attend-on à avoir un champ électromagnétique rayonné par l'atome ? Quelle est à votre avis la pulsation de ce champ ?

- b) On admet que le potentiel vecteur  $\mathbf{A}_{\text{rad}}$  décrivant le champ électromagnétique rayonné peut avoir pour expression à grande distance de l'atome :

$$\mathbf{A}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\mathbf{p}}{dt}(t - r/c)$$

où l'on a introduit  $r = |\mathbf{r}|$  le module du vecteur  $\mathbf{r}$ ,  $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$  est la perméabilité magnétique du vide et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. A l'aide de la décomposition (3), exprimer  $\mathbf{A}_{\text{rad}}$  explicitement en fonction de  $r$  et du temps. En déduire, à l'ordre le plus bas en  $1/r$ , l'expression de  $\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$  à grande distance de l'atome. On rappelle la formule d'analyse vectorielle :

$$\text{rot}(f\mathbf{C}) = f\text{rot}(\mathbf{C}) + \text{grad}f \wedge \mathbf{C} \quad (7)$$

où  $f$  et  $\mathbf{C}$  sont des fonctions scalaire et vectorielle quelconques des coordonnées. On pourra introduire le vecteur unitaire

$$(8)$$

et la notation complexe

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{\text{rad},0}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (9)$$

où  $\mathbf{B}_{\text{rad},0}$  est un vecteur à composantes complexes indépendantes du temps. L'expression obtenue est-elle bien un champ transverse?

- c) A l'aide d'une des équations de Maxwell, déduire de la valeur de  $\mathbf{B}_{\text{rad}}$  l'expression en notation complexe du champ électrique rayonné par l'atome à l'ordre le plus bas en  $1/r$ . On utilisera la relation (7) avec un choix judicieux de  $f$  assurant que le rotationnel de  $\mathbf{C}$  est négligeable. Le champ électrique rayonné est-il bien transverse?
- d) Calculer la moyenne temporelle  $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$  du vecteur de Poynting à grande distance de l'atome. On pourra utiliser l'identité

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

où  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  sont trois vecteurs quelconques.

- e) Calculer le flux du vecteur de Poynting moyen à travers la sphère de rayon  $r$  centrée sur le noyau. On donne l'intégrale sur les angles solides de direction  $\mathbf{n}$  :

$$\int d\Omega n_i n_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{i,j} \quad (11)$$

où  $\delta$  est le delta de Kronecker,  $i, j$  sont deux directions quelconques  $x, y, z$  de l'espace et  $n_i$  est la composante du vecteur  $\mathbf{n}$  le long de l'axe  $i$ . Exprimer la puissance moyenne totale  $P_{\text{rad}}$  rayonnée par l'atome en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\omega_0$ ,  $c$ ,  $|\alpha|$  et  $\mathbf{E}_0$ .

- f) En recoupant l'expression de  $P_{\text{rad}}$  avec un résultat de la question 1.2, montrer que la polarisabilité de l'atome peut s'écrire

$$\alpha = -\frac{3\lambda_0^3}{4\pi^2} \frac{\gamma}{\delta + i\gamma} \quad (12)$$

où l'on a introduit la longueur d'onde  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$  et  $\gamma = \Gamma/2$ . Faire une figure montrant la dépendance en  $\delta$  de la partie réelle et de la partie imaginaire de la polarisabilité  $\alpha$  sur un intervalle centré en  $\delta = 0$  de largeur de l'ordre de quelques  $\gamma$ .

## 2 Propagation de la lumière dans un milieu dilué

Dans cette partie, on étudie la propagation d'un paquet d'ondes électromagnétiques quasi monochromatique dans un milieu dispersif et absorbant. Le milieu remplit uniformément l'espace entre les plans  $z = 0$  et  $z = L$ . Les demi-espaces  $z < 0$  et  $z > L$  sont vides. Pour simplifier, on considère seulement des ondes incidentes se propageant selon l'axe  $z$  et venant de  $z = -\infty$ . Une onde incidente monochromatique de pulsation  $\omega$  possède dans le milieu un vecteur d'onde complexe dirigé suivant  $z$ , que l'on note

$$\mathbf{k} = k(\omega)\mathbf{e}_z = \sqrt{1 + \chi(\omega)}\frac{\omega}{c}\mathbf{e}_z. \quad (13)$$

### 2.1 Construction du paquet d'ondes

- Comment s'appelle la fonction  $\chi$  ? On suppose que l'on peut négliger la formation d'ondes réfléchies aux interfaces  $z = 0$  et  $z = L$ . A quelle condition sur  $\chi$  cette approximation est-elle justifiée ? On se place dans ce cas pour toute la suite.
- Une onde monochromatique incidente donne naissance au champ électrique suivant dans le demi-espace  $z < 0$  :

$$\mathbf{E}_\omega(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega(z/c - t)} + \text{c.c.} \quad (14)$$

où le vecteur  $\mathbf{E}_0$  est une constante indépendante de  $z, t, \omega$ . Donner explicitement la valeur du champ électrique correspondant dans le milieu  $0 < z < L$  et dans le demi-espace  $z > L$ . La densité d'énergie électromagnétique est-elle en général la même dans les demi-espaces  $z < 0$  et  $z > L$  ? Si le milieu est un gaz d'atomes comme celui de la partie 1, qu'est devenue la densité d'énergie manquante ?

- On forme un paquet d'ondes en superposant les ondes monochromatiques précédentes avec une distribution gaussienne :

$$\mathbf{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{2\sigma^2}\right] \mathbf{E}_\omega(z, t). \quad (15)$$

A quelle condition sur le milieu, que nous supposons vérifiée, ce paquet d'ondes satisfait-il aux équations du mouvement du champ ? Quelle est la signification physique des quantités positives  $\sigma$  et  $\bar{\omega}$  ?

- Calculer explicitement la dépendance en  $z$  et en  $t$  du paquet d'ondes dans le demi-espace  $z < 0$ . On donne l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{iqx}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] = e^{-q^2\sigma^2/2} \quad (16)$$

où  $q$  est un nombre complexe quelconque. A quelle vitesse le paquet se propage-t-il ? Faire un dessin du champ électrique en fonction de  $z$  à  $t$  fixé dans le cas  $\sigma \ll \bar{\omega}$ . Caractériser la largeur spatiale du paquet par une longueur  $\Delta z_e$ . Que vaut  $t_e$ , instant d'entrée du maximum de l'enveloppe du paquet d'ondes dans le milieu ?

- On se place dans le cas limite où  $\sigma$  est bien plus faible que l'échelle de variation de  $k(\omega)$  autour de  $\bar{\omega}$  si bien que l'on peut utiliser le développement

$$k(\omega) \simeq k(\bar{\omega}) + (\omega - \bar{\omega})k'(\bar{\omega}) \quad (17)$$

où le prime représente la dérivée première. Calculer alors la dépendance explicite en  $z$  et en  $t$  du paquet d'ondes dans le demi-espace  $z > L$ .

- f) En notation complexe, la composante selon  $\mathbf{E}_0$  du champ électrique dans le demi-espace  $z > L$  peut s'écrire comme le produit d'une fonction enveloppe réelle  $f(z, t)$  et d'une phase  $e^{i\theta(z, t)}$ . Ecrire explicitement la valeur de la fonction enveloppe  $f(z, t)$ . On décomposera la fonction complexe  $k(\omega)$  en sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$k(\omega) = k_R(\omega) + ik_I(\omega). \quad (18)$$

L'expression explicite de la fonction de phase  $\theta(z, t)$  n'est pas demandée.

- g) Donner explicitement la trajectoire du maximum en  $z$  de la fonction enveloppe dans le demi-espace  $z > L$ . A quelle vitesse se déplace le maximum ? A quel instant  $t_s$  sort-il du milieu ?
- h) A l'aide de  $t_e$  et  $t_s$ , définir une vitesse de propagation moyenne  $v$  du maximum du paquet dans le milieu. Dans le cas où le milieu est non absorbant, quel nom donne-t-on traditionnellement à  $v$  ?
- i) L'expression que vous avez obtenue pour  $f$  assure-t-elle automatiquement que le paquet d'ondes sort atténué du milieu absorbant ? Donner une condition sur  $\sigma$  pour que ce soit le cas.
- j) La largeur spatiale du paquet d'ondes a-t-elle changé après traversée du milieu, d'après les calculs des questions précédentes ? En allant à l'ordre suivant dans le développement (17) mais sans chercher à calculer l'intégrale gaussienne correspondante, donner une condition nécessaire sur  $L$ ,  $|k''|$  et  $\sigma$  pour que ce soit effectivement une bonne approximation. Le double prime représente la dérivée seconde.
- k) On se place maintenant dans le milieu,  $0 < z < L$ , à nouveau dans le cadre de l'approximation (17). Calculer en notation complexe le champ électrique dans le milieu, puis sa fonction enveloppe réelle  $f(z, t)$ . Comme à la question 2.1d, on caractérise la largeur spatiale du paquet par une longueur  $\Delta z_m$ . Exprimer le rapport  $\Delta z_m / \Delta z_e$  en fonction de  $c$  et  $k'(\bar{\omega})$ . Dans le cas où l'absorption est négligeable  $k_I(\bar{\omega}) = 0$ ,  $k'_I(\bar{\omega}) = 0$ , montrer que le rapport  $\Delta z_m / \Delta z_e$  est une fonction de  $v/c$  et retrouver ce résultat sans calcul par une interprétation physique très simple.

## 2.2 Application au cas d'un gaz d'atomes à deux niveaux

Le milieu dans lequel les ondes électromagnétiques se propagent est un gaz d'atomes à deux niveaux de densité spatiale  $\rho$  dans la tranche  $0 < z < L$ . Chaque atome a une polarisabilité  $\alpha$  donnée par (12).

- a) Rappeler l'expression de  $\chi$  en fonction de  $\rho$  et de  $\alpha$ . Dans le régime considéré (voir question 2.1a), comment l'expression de  $k(\omega)$  peut-elle se simplifier ? On utilisera cette expression simplifiée dans toute la suite.
- b) Application numérique : on considère des atomes de sodium éclairés sur la transition à 589 nm. Le gaz a une densité  $\rho$  de  $5 \times 10^{18}$  atomes par  $\text{m}^3$ . Calculer  $\rho\alpha$  pour un désaccord  $\delta$  nul. La simplification faite à la question précédente est-elle justifiée ? Donner un ordre de grandeur de l'erreur effectuée sur  $k(\omega)$ .
- c) A partir des résultats de la question 2.1h, obtenir une formule explicite donnant la vitesse  $v$  du paquet d'ondes dans le milieu en fonction de  $\rho\lambda_0^3$ ,  $\delta = \bar{\omega} - \omega_0$ ,  $\gamma = \Gamma/2$ ,

$\omega_0$  et  $c$ . On négligera  $\chi(\bar{\omega})$  devant  $\bar{\omega}\chi'(\bar{\omega})$  en justifiant cette approximation. Quelle est l'échelle typique de variation de  $\alpha$  en fonction de  $\delta$  ? On suppose dans la suite que la largeur  $\sigma$  est petite devant cette échelle, de façon que l'approximation (17) à la base de notre calcul de  $v$  soit utilisable pour une valeur arbitraire de  $\bar{\omega}$ .

- d) Application numérique : pour la transition considérée de l'atome de sodium, on donne  $\Gamma = 6,3 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ . Le gaz a une densité de  $5 \times 10^{18}$  atomes par  $\text{m}^3$  et une épaisseur  $L = 100 \mu\text{m}$ . A désaccord nul  $\delta = 0$ , calculer  $v$  ainsi que la différence entre l'instant de sortie  $t_s$  et l'instant d'entrée  $t_e$ . Commenter soigneusement ces résultats. Vous semblent-ils violer un principe fondamental de la physique ? Calculer le facteur d'atténuation de l'amplitude de l'onde à la sortie du milieu. La condition obtenue au 2.1i est-elle satisfaite ?
- e) On souhaite réduire au minimum la vitesse  $v$  de la lumière dans le milieu. Quelle est pour cela la valeur optimale du désaccord ? Application numérique : calculer la valeur de  $v$  correspondante, ainsi que le coefficient d'atténuation de l'onde à sa sortie du milieu. Ceci permettrait-il de battre le record de Lene Hau ?
- f) Application numérique : on réduit la densité du gaz d'un facteur  $10^7$  par rapport à la question 2.2d. Que devient l'absorption de l'onde dans le milieu ? La vitesse  $v$  peut-elle être supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide ? Si oui, pour quelles valeurs de  $\delta/\gamma$  ceci se produit-il ?

### 3 Cas d'atomes à trois niveaux

L'expérience de Lene Hau met en fait en jeu deux transitions de l'atome de sodium, depuis deux niveaux fondamentaux  $f_1$ ,  $f_2$  vers un même état excité  $e$ . La transition  $f_1 \rightarrow e$  est celle considérée jusqu'à présent dans ce problème. Elle est excitée par le champ électromagnétique de l'impulsion lumineuse que l'on veut ralentir et a été modélisée par un électron élastiquement lié, voir la partie 1.

Le ralentissement de la lumière est obtenu en appliquant un faisceau laser continu dit 'de couplage', qui excite à résonance la transition  $f_2 \rightarrow e$  tout en produisant une excitation négligeable de la transition  $f_1 \rightarrow e$ . Le faisceau laser de couplage modifie cependant de façon profonde la polarisabilité de l'atome sur la transition  $f_1 \rightarrow e$ , car l'état excité  $e$  est commun aux deux transitions.

La description précise de ce phénomène nécessite un traitement quantique du mouvement électronique, hors programme. Nous admettrons donc que l'effet du laser de couplage est bien modélisé par l'introduction fictive d'un second électron élastiquement lié, de masse  $m$ , de charge  $q$  et de vecteur position  $\mathbf{s}(t)$  par rapport au noyau. En l'absence de laser de couplage, ce second électron subit seulement la force  $-m\omega_0^2\mathbf{s}$ , c'est-à-dire qu'il ne subit aucune force de friction, ni aucune force électromagnétique de la part de l'impulsion lumineuse incidente.

Le seul effet de la présence du laser de couplage est d'introduire une force de couplage entre les deux électrons élastiquement liés. Cette force dérive du potentiel

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = m\omega_0\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} \quad (19)$$

où la pulsation  $\Omega$  est proportionnelle à la racine carrée de l'intensité moyenne du laser de couplage.

### 3.1 Polarisabilité de l'atome à trois niveaux

La transition  $f_1 \rightarrow e$  est éclairée par un champ monochromatique de pulsation  $\omega$ , si bien que l'électron élastiquement lié de vecteur position  $\mathbf{u}$  est excité par le champ électrique (1).

- Donner l'expression de la force subie par  $\mathbf{u}$  de la part de  $\mathbf{s}$  puis de la force subie par  $\mathbf{s}$  de la part de  $\mathbf{u}$ . On ne s'inquiétera pas du fait que le principe d'action et de réaction n'est pas satisfait.
- Ecrire les équations du mouvement satisfaites par  $\mathbf{u}$  et par  $\mathbf{s}$ .
- On se place en régime forcé pour les oscillateurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{s}$  :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (20)$$

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{s}_0 e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (21)$$

où les vecteurs à composantes complexes  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{s}_0$  ne dépendent pas du temps. Ecrire les équations satisfaites par  $\mathbf{u}_0$  et  $\mathbf{s}_0$ .

- A l'aide d'une des équations précédentes, exprimer  $\mathbf{s}_0$  en fonction de  $\mathbf{u}_0$ . En déduire une équation portant seulement sur  $\mathbf{u}_0$ .
- Simplifier cette équation dans la limite (5). En déduire la polarisabilité  $\alpha$  de la transition  $f_1 \rightarrow e$  en fonction de  $q$ ,  $m$ ,  $\omega_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\delta$ ,  $\gamma = \Gamma/2$  et  $\Omega$ .
- A partir des résultats de la sous-partie 1.3, montrer finalement que la polarisabilité  $\alpha$  en présence du laser de couplage vaut

$$\alpha = -\frac{3\lambda_0^3}{4\pi^2} \frac{\gamma}{\delta + i\gamma - \Omega^2/4\delta}. \quad (22)$$

### 3.2 La lumière lente

- Quel est le vecteur d'onde de la lumière dans le gaz lorsque  $\omega$  est rigoureusement égal à  $\omega_0$  ? Quelle propriété remarquable a alors le gaz vis-à-vis de la lumière monochromatique à cette pulsation ? Comparer au cas des atomes à deux niveaux.
- On se place dans le régime d'un désaccord beaucoup plus faible que  $\gamma$  en valeur absolue, et d'une intensité du laser de couplage assez faible pour que  $\Omega \ll \gamma$ . Montrer qu'un des termes au dénominateur dans l'équation (22) est négligeable. En déduire que la dépendance en fréquence de la polarisabilité est caractérisée par une mi-largeur

$$\tilde{\gamma} = \frac{\Omega^2}{4\gamma} \ll \gamma. \quad (23)$$

Pourquoi souhaite-t-on avoir  $\sigma \ll \tilde{\gamma}$  dans la suite ?

- En revenant à l'expression exacte (22), faire un dessin schématique de la dépendance en  $\delta$  de la partie réelle et de la partie imaginaire de  $\alpha$  sur un intervalle centré en  $\delta = 0$  et de largeur de l'ordre de quelques  $\gamma$ . On considérera deux valeurs de l'intensité du laser de couplage, l'intensité nulle et une intensité non nulle assez faible pour que  $\Omega \ll \gamma$ .

- d) Calculer  $k'(\bar{\omega})$  dans le cas  $\bar{\omega} = \omega_0$  et pour une intensité quelconque du laser de couplage. En déduire l'expression de la vitesse  $v$ . La condition obtenue à la question 2.1i est-elle satisfaite ?
- e) Application numérique : dans l'une des expériences de Lene Hau, le gaz de sodium utilisé a une densité de  $\rho = 5 \times 10^{18}$  atomes par  $\text{m}^3$  et le laser de couplage a une intensité de  $120 \text{ W/m}^2$  ce qui correspond à  $\Omega = 0,56\Gamma$ . Calculer  $v/c$  puis  $v$  pour  $\bar{\omega} = \omega_0$ . Comparer au record établi par Lene Hau,  $v = 17 \text{ m/s}$ .
- f) En principe, quelle est la valeur de  $\Omega$  conduisant à la vitesse  $v$  la plus faible ? Qu'en est-il en pratique, sachant que la largeur en fréquence de l'impulsion lumineuse n'est pas arbitrairement faible ? Application numérique : en un point  $z < 0$  fixé, donc en dehors du gaz, le paquet d'ondes incident a un profil temporel d'intensité gaussien de mi-largeur à mi-hauteur  $\tau = 1,25\mu\text{s}$ . Calculer  $\sigma$  et la valeur minimale de  $\Omega$  utilisable. La valeur de  $\Omega$  utilisée dans l'expérience est-elle supérieure à cette valeur minimale ?
- g) Application numérique : dans l'expérience de Lene Hau, quelle mi-largeur spatiale a l'impulsion lumineuse lorsqu'elle se trouve dans le gaz atomique ? On utilisera les résultats de la question 2.1k.