



SESSION DE 1997

Groupe D/S

PHYSIQUE

ENS : Ulm

DURÉE : 6 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé

Ce problème aborde quelques aspects de la propagation de lumière par fibres optiques dans le but d'évaluer les performances de ces fibres pour le transport d'information.

La partie I propose une étude du fonctionnement des différents types de fibre optique, basée sur des arguments d'optique géométrique et ondulatoire. La partie II concerne l'étude de la propagation d'une impulsion lumineuse dans une fibre optique. Dans la partie III, on s'intéresse au transport d'information par fibre optique et aux performances des différents types de fibre en s'appuyant sur les résultats des parties précédentes. La partie IV étudie la propagation d'une impulsion lumineuse dans un milieu dispersif et non linéaire. Enfin la partie V propose une étude plus détaillée des fibres à saut d'indice basée sur la résolution des équations de Maxwell.

Toutes les parties peuvent être abordées séparément, y compris la partie III puisque les résultats des parties I et II nécessaires à sa résolution sont rappelés.

Les questions qui ont trait à l'utilisation pratique des fibres optiques auront un poids important dans le barème, en particulier les applications numériques. D'autre part, les réponses à certaines questions étant fournies par l'énoncé, il va de soi que la totalité des points ne sera accordée que si les raisonnements qui permettent d'arriver à la solution sont clairement énoncés.

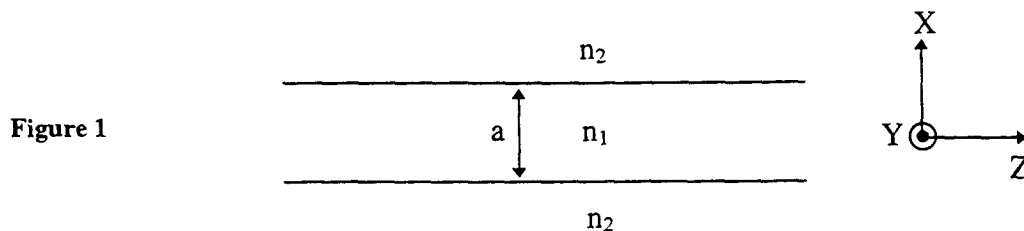
On note ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ SI sa perméabilité magnétique, $c = 3.10^8$ ms⁻¹ la vitesse de la lumière dans le vide et $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ SI la constante de Planck. On rappelle qu'une picoseconde (notée ps) vaut 10^{-12} seconde.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

PARTIE I : Propagation des rayons lumineux dans les fibres optiques

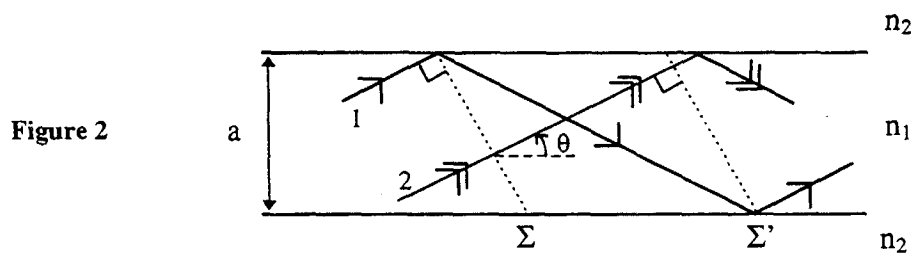
A) Fibres à saut d'indice

On s'intéresse ici à la propagation des rayons lumineux dans les fibres optiques à saut d'indice. Ces fibres sont constituées d'un cœur diélectrique cylindrique de diamètre a et d'indice n_1 entouré d'une gaine diélectrique d'indice n_2 très légèrement inférieur à n_1 . On étudie ici une géométrie bidimensionnelle qui rend bien compte des propriétés fondamentales de ces fibres. On considère une couche diélectrique plane (cœur) d'épaisseur a , d'indice n_1 , immergée dans un milieu diélectrique infini (gaine) d'indice n_2 inférieur à n_1 . Les axes X, Y, Z sont définis sur la figure 1.



On supposera dans toute cette partie la fibre éclairée par un rayonnement monochromatique de pulsation ω .

- 1) En considérant la propagation dans le plan XZ d'un rayon lumineux faisant un angle θ avec l'axe Z de la fibre, expliquer quel est le phénomène physique à l'origine de la propagation sans perte dans le cœur de la fibre optique. Montrer que cette propagation est possible lorsque $|\theta|$ est inférieur à une valeur critique θ_c que l'on déterminera.
- 2) On considère deux rayons parallèles notés 1 et 2 se propageant à l'intérieur du cœur de la fibre en faisant avec l'axe Z un angle θ qui satisfait la condition précédente. Les ondes associées à ces deux rayons sont supposées en phase sur la surface Σ (voir figure 2).



En omettant pour simplifier les déphasages introduits par les réflexions aux interfaces, déterminer la différence δ des chemins optiques parcourus par les rayons 1 et 2 pour relier Σ à Σ' (voir figure 2). A quelle condition les ondes associées aux rayons 1 et 2 sont-elles en phase sur Σ' ? Montrer que la propagation guidée n'est possible que pour des valeurs discrètes de l'angle θ associées par définition aux modes guidés de la fibre optique.

Montrer qu'il existe au moins un mode guidé et exprimer le nombre de modes en fonction des données de l'énoncé.

Application pratique : on éclaire une fibre en silice par un rayonnement de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1,3 \mu\text{m}$; on donne : $n_1 = 1,46$ et $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = 0,01$; déterminer les valeurs de a pour lesquelles la fibre est monomode. Déterminer le nombre de modes de la fibre pour $a = 25 \mu\text{m}$.

- 3) On considère une fibre optique possédant à la pulsation ω un grand nombre de modes guidés. Montrer que pour une longueur L de fibre, les temps de parcours du mode le plus lent et du mode le plus rapide diffèrent d'une quantité :

$$\delta\tau \approx \frac{n_1 L \Delta}{c}$$

où on a posé $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$.

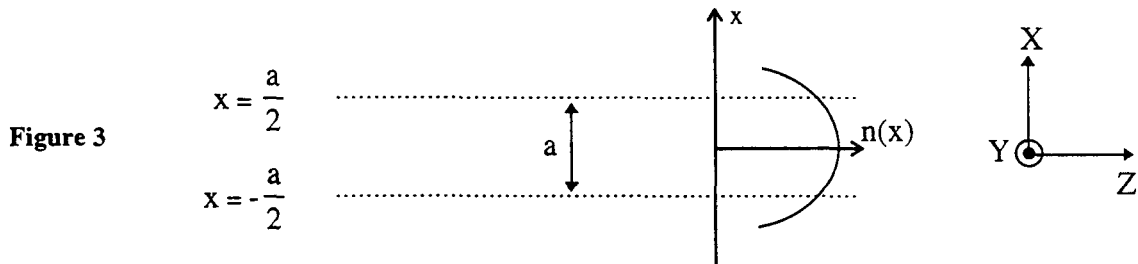
Application pratique : pour une fibre en silice, $n_1 = 1,46$ et $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = 0,01$;
calculer $\delta\tau$ pour $L = 1$ km.

B) Fibres à gradient d'indice

On s'intéresse ici au principe de fonctionnement des fibres optiques à gradient d'indice, sans chercher à déterminer leurs modes de propagation guidée. Ces fibres sont constituées d'un cylindre de diamètre a formé d'un matériau diélectrique dont l'indice varie graduellement avec la distance à l'axe du cylindre depuis une valeur n_1 sur l'axe à une valeur n_2 très légèrement inférieure à n_1 sur le bord. On utilise ici un modèle de ce type de fibre où on considère un milieu infini dont l'indice n dépend d'une coordonnée x avec une loi de variation quadratique (voir figure 3) :

$$n^2(x) = n_1^2 \left(1 - 8\Delta \frac{x^2}{a^2} \right)$$

où $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ de sorte que $n(0) = n_1$ et $n\left(\pm \frac{a}{2}\right) = n_2$.



Dans cette géométrie, a correspond au diamètre de la fibre et on considérera qu'un rayon est guidé par le milieu s'il reste constamment compris entre les plans d'équations $x = \pm \frac{a}{2}$.

- 1) Quel est le phénomène physique à l'origine du guidage d'un rayon lumineux par un tel milieu ?
- 2) On considère un rayon lumineux se propageant dans un plan XZ.
 - a) En utilisant les lois de Descartes et en découpant le milieu en tranches horizontales dont on fera tendre l'épaisseur vers 0, établir l'équation de la trajectoire du rayon lumineux :

$$\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 = \frac{n^2(x) - \alpha^2}{\alpha^2} \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante.}$$

- b) Montrer qu'un rayon est guidé par la fibre si $n_2 \leq \alpha \leq n_1$.

- c) Montrer qu'en choisissant bien l'origine des z , l'équation de la trajectoire du rayon lumineux est :

$$x = x_0 \cos \Omega z$$

où $\Omega = \frac{2n_1 \sqrt{2\Delta}}{\alpha a}$. Exprimer x_0 en fonction des données de l'énoncé.

Discuter l'allure des rayons guidés suivant les valeurs de α . On s'intéressera en particulier aux cas limites $\alpha = n_1$ et $\alpha = n_2$.

- 3) a) Montrer que le temps mis par la lumière pour parcourir un quart de période de la trajectoire d'un rayon guidé de paramètre α est :

$$\frac{\pi a}{8n_1 c \sqrt{2\Delta}} (n_1^2 + \alpha^2).$$

- b) En déduire le temps τ mis par la lumière pour parcourir une distance L de la fibre sur un rayon lumineux de paramètre α .
- c) Montrer que l'intervalle de temps $\delta\tau$ qui sépare, au bout d'une longueur L de la fibre, le rayon le plus rapide du rayon le plus lent est :

$$\delta\tau \approx \frac{n_1 L \Delta^2}{2c}.$$

Pour la suite du problème, on admettra le résultat suivant, démontré dans la partie A pour les fibres à saut d'indice : dans le cas d'une fibre admettant beaucoup de modes de propagation guidée, $\delta\tau$ est également le temps qui sépare le mode le plus lent du mode le plus rapide après parcours d'une distance L de fibre.

- d) On reprend pour les indices n_1 et n_2 , les valeurs utilisées dans le cas des fibres à saut d'indice (voir question I.A.2). Comparer les valeurs de $\delta\tau$ obtenues pour une même longueur L de fibre dans le cas des fibres à saut d'indice et dans le cas des fibres à gradient d'indice. Quelle est l'origine physique de la différence entre ces deux résultats ?

Application pratique : $L = 1$ km.

PARTIE II : Propagation d'une impulsion lumineuse dans une fibre optique

On s'intéresse dans cette partie à la propagation d'une impulsion lumineuse dans une fibre optique ne présentant pour toutes les pulsations mises en jeu qu'un seul mode de propagation guidée. Pour simplifier l'étude, on considère en fait un milieu infini où le vecteur d'onde d'une onde plane se propageant dans la direction z est une fonction $\beta(\omega)$ de la pulsation ω de l'onde. L'impulsion lumineuse est obtenue à partir d'une source supposée parfaitement monochromatique et de pulsation ω_0 . Cette source, placée en $z = 0$, voit son amplitude modulée par une impulsion de forme gaussienne de sorte que le champ électrique

en $z = 0$ est donné par :

$$E(0, t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{2T^2}} e^{-i\omega_0 t}.$$

T est la largeur temporelle caractéristique de l'impulsion ; pour $t = T$, l'intensité lumineuse est divisée par $e = 2,718$ par rapport à l'intensité à $t = 0$.

1) On rappelle que les relations de transformée de Fourier permettent d'écrire :

$$E(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(0, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

où
$$\tilde{E}(0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(0, t) e^{i\omega t} dt$$

a) Interpréter physiquement la première des deux relations précédentes.

b) En utilisant la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}(x+\beta)^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}$ valable pour α réel positif et β

complexe quelconque, vérifier que $\tilde{E}(0, \omega) = E_0 \frac{T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{T^2(\omega-\omega_0)^2}{2}}$

c) Définir la largeur spectrale de la source modulée par analogie avec la définition de sa largeur temporelle. Commenter la relation entre largeur spectrale et largeur temporelle de la source.

2) Exprimer $E(z, t)$ sous forme d'une intégrale.

3) Dans la suite, on utilisera pour $\beta(\omega)$ le développement suivant :

$$\beta = \beta_0 + \dot{\beta}_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\ddot{\beta}_0(\omega - \omega_0)^2$$

où $\beta_0 = \beta(\omega_0)$, $\dot{\beta}_0 = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$ et $\ddot{\beta}_0 = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$.

Justifier l'utilisation de ce type de développement.

On montre alors à partir de ce qui précède que (les calculs, longs mais sans difficulté particulière, ne sont pas demandés) :

$$E(z, t) = \frac{TE_0}{\sqrt{T^2 - i\ddot{\beta}_0 z}} \exp\left(\frac{-(t - \dot{\beta}_0 z)^2 T^2 - i\ddot{\beta}_0 z(t - \dot{\beta}_0 z)^2}{2(T^4 + (\ddot{\beta}_0 z)^2)}\right) \exp(-i(\omega_0 t - \beta_0 z))$$

où $\sqrt{T^2 - i\ddot{\beta}_0 z}$ désigne le nombre complexe de partie réelle positive dont le carré est $T^2 - i\ddot{\beta}_0 z$.

- 4) Commenter la forme de $E(z,t)$ en répondant en particulier aux questions suivantes :
- Quelle est la forme temporelle de l'impulsion lumineuse en $z \neq 0$?
 - A quelle vitesse se propage le maximum de l'impulsion ?
 - Que vaut la largeur temporelle caractéristique σ de l'impulsion en fonction de $\sigma_0 = \sigma(z=0) = T$? Vérifier que l'on observe un élargissement de l'impulsion et que pour les grandes valeurs de z , on a :

$$\sigma = \frac{|\ddot{\beta}_0|z}{\sigma_0}.$$

Quelle est la raison physique de cet élargissement ? Retrouver l'ordre de grandeur de σ (pour z grand) par un raisonnement simple.

- 5) Tracer la courbe σ fonction de σ_0 ; montrer qu'il existe une valeur optimum σ_0^{opt} de σ_0 qui permet d'obtenir l'impulsion la plus courte après le parcours d'une distance L de la fibre. Interpréter physiquement ce comportement. Calculer la durée σ^{opt} de l'impulsion la plus courte en $z = L$.
Commenter la variation de σ^{opt} avec L .

Application pratique : Pour une fibre en silice, on donne pour une radiation de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$, $\ddot{\beta}_0 = 15 \text{ ps}^2\text{km}^{-1}$. Calculer σ^{opt} pour $L = 1 \text{ km}$.

PARTIE III : Transport d'information par fibre optique

Cette partie utilise les résultats des parties précédentes pour étudier sommairement les possibilités de transport d'information par fibre optique. Il n'est pas nécessaire pour l'aborder d'avoir mené l'étude des parties I et II jusqu'au bout, les résultats nécessaires étant rappelés ici.

Pour transporter de l'information par fibre optique, on module l'intensité de l'onde lumineuse qui parcourt la fibre. On s'intéresse ici à un mode de transmission numérique où l'information est codée sous forme d'une suite d'éléments binaires, appelés bits, chaque élément binaire valant 1 ou 0. Dans la fibre, l'information est transmise sous forme d'une succession d'impulsions lumineuses, la présence de lumière étant associée à l'état 1, son absence à l'état 0. On désignera par B le nombre de bits transmis par seconde. On se propose d'étudier ici deux limitations à la transmission d'information par fibre optique : la première est associée à l'atténuation de la lumière dans la fibre, la deuxième à la dispersion.

A) Limitations dues à l'atténuation

On suppose la fibre éclairée par une source de puissance lumineuse P_0 et de longueur d'onde dans le vide λ_0 . La lumière voyageant dans la fibre optique voit son intensité diminuer exponentiellement avec la longueur L de fibre parcourue.

1) Quelles sont les causes d'une telle atténuation ?

La figure 4 donne en fonction de λ_0 le coefficient α d'atténuation de l'énergie pour une fibre optique en silice.

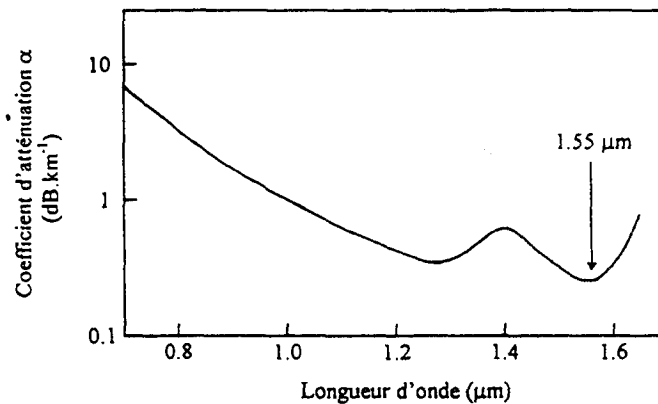


Figure 4

2) En admettant que le récepteur situé en bout de fibre doit recevoir en moyenne au minimum N photons par bit pour assurer une réception correcte, montrer que la longueur maximum d'une fibre dont le débit d'information est B peut s'écrire :

$$L_{\max} = L_0 - \frac{10}{\alpha} \log B.$$

On exprimera L_0 en fonction des données de l'énoncé.

Pour quelle longueur d'onde a-t-on intérêt à utiliser la fibre optique si l'on veut minimiser les effets de l'atténuation ?

B) Limitations dues à la dispersion

Dans le cas des fibres possédant plusieurs modes de propagation guidée, le temps mis par la lumière pour parcourir une longueur donnée de fibre dépend du mode considéré. Ce phénomène porte le nom de dispersion intermodale. On a établi dans la partie I que l'intervalle de temps qui sépare le mode le plus lent du mode le plus rapide après parcours d'une longueur L de fibre vaut :

$$\delta\tau = \frac{n_1 L \Delta}{c} \quad \text{dans le cas des fibres à saut d'indice}$$

et
$$\delta\tau = \frac{n_1 L \Delta^2}{2c} \quad \text{dans le cas des fibres à gradient d'indice.}$$

On rappelle que n_1 désigne l'indice au centre de la fibre, n_2 l'indice sur ses bords et $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$.

- 1) En supposant que tous les modes interviennent effectivement dans la propagation et que l'on peut tolérer un élargissement de chaque bit égal à la moitié de la durée d'un bit, montrer que la longueur maximale d'une fibre multimode dont le débit d'information est B peut s'écrire :

$$L_{\max}' = \frac{c}{2n_1\Delta B} \quad \text{dans le cas des fibres à saut d'indice}$$

et

$$L_{\max}' = \frac{c}{n_1\Delta^2 B} \quad \text{dans le cas des fibres à gradient d'indice.}$$

- 2) On a également montré dans la partie II que la dispersion de la fibre entraînait l'élargissement d'une impulsion lumineuse. Ce phénomène porte le nom de dispersion intramodale. On a montré, dans le cas d'une impulsion gaussienne, que la durée de l'impulsion σ après parcours d'une distance L de la fibre est reliée à sa

durée initiale σ_0 par la formule :
$$\sigma = \frac{|\ddot{\beta}_0|L}{\sigma_0}$$

où $\ddot{\beta}_0$ caractérise le pouvoir dispersif de la fibre.

En supposant cette relation valable quelle que soit la forme de l'impulsion lumineuse, montrer que la dispersion intramodale entraîne une limitation de la longueur de la fibre donnée par :

$$L_{\max}'' = \frac{3}{2|\ddot{\beta}_0|B^2}$$

La figure 5 donne la variation typique de $\ddot{\beta}_0$ avec λ_0 pour une fibre optique en silice. A quelle longueur d'onde doit on utiliser la fibre optique pour minimiser les effets de la dispersion intramodale ?

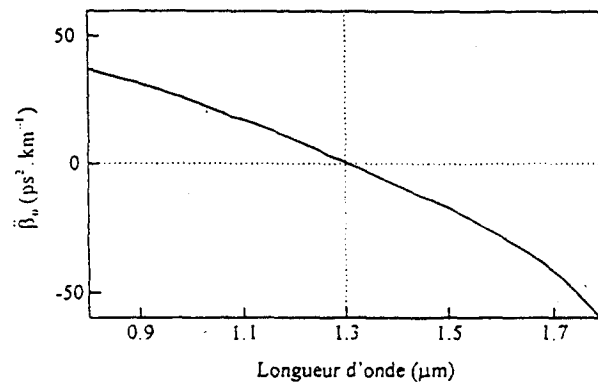


Figure 5

C) Application pratique : rassembler les résultats des parties A et B sur un diagramme donnant, en échelles logarithmiques, la longueur maximale d'une fibre optique en fonction du débit d'information dans le cas d'une fibre à saut d'indice, dans celui d'une fibre à gradient d'indice et dans celui d'une fibre monomode. On utilisera les valeurs numériques suivantes : $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$, $\alpha = 0,16 \text{ dB/km}$, $\beta_0 = -20 \text{ ps}^2\text{km}^{-1}$, $P_0 = 1 \text{ mW}$, $N = 10$, $n_1 = 1,46$, $\Delta = 0,01$.

PARTIE IV : Propagation par solitons

On s'intéresse dans cette partie à la propagation d'un paquet d'onde dans un milieu diélectrique peu dispersif où la polarisation \bar{P} est une fonction légèrement non linéaire du champ électrique \bar{E} . On suppose que l'on peut écrire :

$$\bar{P} = \bar{P}_L + \bar{P}_{NL} \quad \text{où} \quad \bar{P}_{NL} = \alpha |\bar{E}|^2 \bar{E}$$

où $|\bar{E}|$ désigne l'amplitude du champ électrique.

- 1) On considère une onde plane se propageant dans la direction Z et dont le champ électrique \bar{E} est supposé parallèle à la direction X orthogonale à Z. A l'aide des équations de Maxwell, établir l'équation de propagation:

$$-\Delta \bar{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}$$

Montrer qu'en régime linéaire, la pulsation ω et le vecteur d'onde $\beta(\omega)$ de l'onde sont reliés par :

$$\beta^2(\omega) = (1 + \chi(\omega)) \frac{\omega^2}{c^2}$$

où $\chi(\omega)$ désigne la susceptibilité linéaire du milieu définie par $\bar{P}_L = \epsilon_0 \chi(\omega) \bar{E}$ pour une onde plane de pulsation ω .

On considère maintenant un paquet d'onde se propageant dans la direction Z. Ce paquet d'onde est constitué d'une somme d'ondes planes polarisées suivant X, de pulsations très proches de ω_0 de sorte que la composante sur X du champ électrique associé s'écrit :

$$E(z, t) = \int \tilde{E}(\omega) e^{-i(\omega t - \beta(\omega)z)} d\omega$$

avec $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ et $|\beta(\omega) - \beta(\omega_0)| \ll \beta(\omega_0) = \beta_0$ pour toutes les pulsations ω intervenant dans la sommation.

- 2) On définit la fonction $\bar{E}(z, t)$, appelée enveloppe du champ électrique, par :

$$E(z, t) = \bar{E}(z, t)e^{-i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$$

Vérifier que $\bar{E}(z, t)$ est une fonction lentement variable par rapport à l'onde plane de pulsation ω_0 en précisant le sens de cette assertion. Justifier la dénomination de $\bar{E}(z, t)$.

3) Pour tenir compte de la dispersion du milieu, on développe $\chi(\omega)$ autour de ω_0 :

$$\chi = \chi_0 + \dot{\chi}_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\ddot{\chi}_0(\omega - \omega_0)^2$$

$$\text{où } \chi_0 = \chi(\omega_0), \dot{\chi}_0 = \left. \frac{d\chi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \text{ et } \ddot{\chi}_0 = \left. \frac{d^2\chi}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Justifier ce développement et montrer que dans ces conditions on peut écrire :

$$\bar{P}_L = \epsilon_0 \chi_0 \bar{E} + i\epsilon_0 \dot{\chi}_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \ddot{\chi}_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

où $\bar{P}_L(z, t)$ est l'enveloppe de $P_L(z, t)$.

4) A l'aide de l'équation de propagation, montrer que :

$$\begin{aligned} -2i\beta_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial z^2} - \left[\frac{2i\omega_0}{c^2}(1 + \chi_0) + \frac{i\omega_0^2}{c^2} \dot{\chi}_0 \right] \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \dots \\ \dots + \left[\frac{1}{c^2}(1 + \chi_0) + \frac{\omega_0^2}{2c^2} \ddot{\chi}_0 + \frac{2\omega_0}{c^2} \dot{\chi}_0 \right] \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \left[\frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \right] e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \end{aligned}$$

5) En utilisant la relation liant $\beta(\omega)$ à ω , montrer que:

$$-2i\beta_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} - 2i\beta_0 \dot{\beta}_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \beta_0 \ddot{\beta}_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \omega_0^2 \alpha |\bar{E}|^2 \bar{E}$$

$$\text{où } \dot{\beta}_0 = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \text{ et } \ddot{\beta}_0 = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$$

6) En effectuant le changement de variables : $\xi = z$, $\tau = t - \dot{\beta}_0 z$, montrer que l'équation précédente peut s'écrire :

$$-i \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\ddot{\beta}_0}{2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \tau^2} = \frac{\beta_0 n'}{n_0} |\bar{E}|^2 \bar{E}$$

où on a posé $\alpha = 2\varepsilon_0 n_0 n'$, n_0 désignant l'indice du milieu en régime linéaire à la pulsation ω_0 .

Interpréter cette équation lorsque $\alpha = 0$ et $\ddot{\beta}_0 = 0$, puis lorsque $\alpha = 0$ et $\ddot{\beta}_0 \neq 0$.

- 7) Dans la suite on supposera $\ddot{\beta}_0 < 0$, ce qui est le cas pour la silice lorsque $\lambda_0 > 1,3 \mu\text{m}$ (voir figure 5). On parle alors de dispersion anormale.

En posant $U = \sqrt{\frac{\ddot{\beta}_0 n'}{n_0}} \bar{E}$, $\delta = \frac{\tau}{\sqrt{-\ddot{\beta}_0}}$, montrer que l'équation précédente s'écrit :

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \delta^2} + |U|^2 U = 0.$$

Montrer que $U(\xi, \delta) = \frac{a e^{ia^2 \frac{\xi}{2}}}{\cosh(a\delta)}$ est solution pour $a > 0$.

Montrer que le champ électrique correspondant peut s'écrire :

$$\bar{E}(z, t) = \frac{1}{t_0} \sqrt{-\frac{n_0 \ddot{\beta}_0}{n' \beta_0}} \frac{e^{\frac{iz}{4z_0}}}{\cosh\left(\frac{t - \dot{\beta}_0 z}{t_0}\right)}$$

où $z_0 = -\frac{t_0^2}{2\ddot{\beta}_0}$.

Commenter la forme de ces solutions, appelées solitons ; on s'intéressera en particulier à leur évolution dans le temps. Représenter la courbe $|\bar{E}|^2$ fonction de $\frac{t - \dot{\beta}_0 z}{t_0}$. Que représente t_0 ? z_0 est appelée distance de dispersion caractéristique du soliton ; justifier ce terme en vous aidant éventuellement des résultats de la partie II.

Commenter la variation d'amplitude du soliton en fonction de son temps caractéristique.

Quels sont les intérêts des solitons pour le transport d'informations dans les fibres optiques ?

Application pratique : On a pu observer dans une fibre en silice monomode, éclairée par un rayonnement de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$, la propagation de solitons de durée caractéristique $t_0 = 4 \text{ ps}$.

Estimer la puissance avec laquelle on doit éclairer une fibre de section $100 \mu\text{m}^2$ pour pouvoir engendrer de tels solitons. On donne pour la silice et pour $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$, $\ddot{\beta}_0 = -20 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}$, $n_0 = 1,46$ et $n' = 1,2 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2/\text{V}^2$.

Donner un ordre de grandeur du nombre maximal de bits par seconde que l'on peut espérer transmettre par un tel système pour une longueur de fibre $L = 1$ km. Comparer ce résultat à ceux obtenus à la fin de la partie III.

PARTIE V : Fibres optiques à saut d'indice

Cette partie revient sur l'étude des propriétés principales des fibres optiques à saut d'indice et reprend l'étude proposée au I.A en s'appuyant sur les équations de Maxwell. On rappelle que les fibres à saut d'indice sont constituées d'un cœur diélectrique cylindrique de diamètre a et d'indice n_1 entouré d'une gaine diélectrique d'indice n_2 inférieur à n_1 . On étudie ici comme dans la partie I.A une géométrie bidimensionnelle qui rend bien compte des propriétés fondamentales de ces fibres. On considère une couche diélectrique plane (cœur) d'épaisseur a , d'indice n_1 , immergée dans un milieu diélectrique infini (gaine) d'indice n_2 très légèrement inférieur à n_1 . Les axes X, Y, Z sont définis sur la figure 1 (partie I) et l'origine des x est choisie au milieu du cœur de la fibre, délimité par les plans d'équations $x = \pm \frac{a}{2}$.

On supposera dans toute cette partie la fibre éclairée par un rayonnement monochromatique de pulsation ω .

- 1) Etablir dans chaque couche de la structure l'équation de propagation du champ électrique \vec{E} associé à l'onde lumineuse :

$$\Delta \vec{E} - \frac{n_i^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

où n_i désigne l'indice de la couche considérée ($i = 1$ ou 2).

On cherche des solutions de la forme $\vec{E} = \vec{A}(x)e^{-i(\alpha x - \beta z)}$ et on s'intéresse aux modes dits transverses électriques et notés TE dans la suite, pour lesquels $A_z = 0$. Vérifier que pour un tel mode, on a dans chaque couche :

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + (k_i^2 - \beta^2)A_y = 0 \quad (1)$$

où on a posé $k_i = \frac{n_i \omega}{c}$.

- 2) a) Montrer que les conditions aux limites imposent la continuité de A_y et $\frac{dA_y}{dx}$ aux

interfaces $x = \pm \frac{a}{2}$.

- b) Discuter la nature des solutions de l'équation (1) dans chaque tranche en fonction de la valeur de $k_i^2 - \beta^2$. La symétrie du problème par rapport au plan OYZ permet de chercher des solutions qui soient paires ou impaires en x . Montrer en utilisant

les conditions aux limites en $\pm \frac{a}{2}$ et à l'infini qu'il n'existe pas de solution au problème pour $k_1 < \beta$.

- c) On s'intéresse aux modes guidés de la fibre optique définis comme ceux pour lesquels un pourcentage non nul de l'énergie lumineuse est confiné dans le cœur de la fibre. Montrer qu'on restreint alors le problème aux valeurs de β telles que $k_2 \leq \beta$.
- 3) a) On suppose dans toute la suite $k_2 \leq \beta \leq k_1$ et on cherche à déterminer les modes guidés de la fibre optique. Ecrire la forme générale d'une solution paire. En utilisant les différentes conditions aux limites, montrer qu'une telle solution n'est possible que si :

$$\frac{\gamma a}{2} = \frac{\kappa a}{2} \operatorname{tg} \frac{\kappa a}{2} \quad (2)$$

où $\kappa^2 = k_1^2 - \beta^2$ et $\gamma^2 = \beta^2 - k_2^2$

Procéder de même pour les solutions impaires et montrer que leur condition d'existence est :

$$\frac{\gamma a}{2} = -\frac{\kappa a}{2} \operatorname{cotg} \frac{\kappa a}{2} \quad (3)$$

- b) Représenter sur un même schéma l'allure des graphes donnant $\frac{\gamma a}{2}$ en fonction de $\frac{\kappa a}{2}$ pour chacune des relations (2) et (3). En utilisant la relation :

$$\left(\frac{\kappa a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}(k_1^2 - k_2^2), \quad (4)$$

trouver le principe d'une détermination graphique des modes guidés TE de la fibre. Vérifier qu'il existe toujours un mode TE guidé et que le nombre de ces modes est :

$$N_{\text{TE}} = 1 + \operatorname{Int}\left(\frac{\omega a}{\pi c} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$$

où $\operatorname{Int}(u)$ désigne la partie entière de u .

Comparer ce résultat à celui du I.A.2.

- 4) Ecrire la condition d'existence du $n^{\text{ème}}$ mode TE guidé et vérifier qu'il existe pour ce mode une pulsation de coupure ω_{nc} que l'on déterminera. Vérifier que pour $\omega = \omega_{\text{nc}}$,

on a pour le $n^{\text{ème}}$ mode : $\frac{\beta}{\kappa} = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$.

En écrivant explicitement la forme du champ électrique dans la fibre, vérifier que celui-ci peut être exprimé comme la somme de deux ondes planes dont on déterminera les vecteurs d'onde. Déterminer l'angle α entre ces vecteurs d'onde et l'axe Z de la fibre optique. Interpréter la condition de coupure en termes de réflexion totale. Faire le lien avec la partie I.A.

- 5) a) On cherche à déterminer la relation de dispersion $\beta(\omega)$ du $n^{\text{ème}}$ mode au voisinage de sa pulsation de coupure. En posant $\kappa \frac{a}{2} = \frac{(n-1)\pi}{2} + \varepsilon$, montrer en utilisant les relations (2) et (3), que pour le $n^{\text{ème}}$ mode au voisinage de ω_{nc} :

$$\gamma a = (n-1)\pi\varepsilon \quad \text{au premier ordre en } \varepsilon.$$

En utilisant la relation (4), montrer d'autre part que :

$$\frac{a}{2} \sqrt{k_1^2 - k_2^2} = \frac{(n-1)\pi}{2} + \varepsilon \quad \text{au premier ordre en } \varepsilon.$$

En déduire la relation de dispersion du $n^{\text{ème}}$ mode au voisinage de sa pulsation de coupure :

$$\beta^2 = \left(\frac{n_2 \omega}{c} \right)^2 + \frac{(n-1)^2 \pi^2}{4c^2} (n_1^2 - n_2^2) (\omega - \omega_{nc})^2$$

- b) En utilisant les résultats de la question précédente et en étudiant la relation de dispersion d'un mode loin de sa pulsation de coupure, tracer sur un graphe $\omega(\beta)$ l'allure des relations de dispersion des modes guidés.
- c) A l'aide de la question 3), représenter $A_y(x)$ pour le $n^{\text{ème}}$ mode guidé au voisinage de sa pulsation de coupure et loin de celle-ci. Interpréter les comportements limites des relations de dispersion trouvées précédemment en termes énergétiques.
- 6) On considère une fibre optique de longueur L telle que le nombre de modes qui peuvent s'y propager à la pulsation ω soit grand devant 1. Quel est le mode le plus rapide ? Quel est le plus lent ? Montrer que ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux de la partie I.A). Comment faudrait-il modifier le modèle de la partie I.A) pour remédier à cette contradiction ?
Vérifier que le modèle simple présenté au I.A) prévoit tout de même la bonne valeur de la différence $\delta\tau$ des temps de parcours du mode le plus lent et du mode le plus rapide.