



SESSION DE 1997

Composition de Physique

Epreuve commune aux ENS de Cachan et de Lyon

Durée : 5 heures

Ce problème est constitué de deux parties largement indépendantes.

Dans la première partie, on considère une modélisation de l'interféromètre de Michelson, dans le cas de son utilisation en lame d'air à faces parallèles. On étudie ensuite comment cet instrument permet de réaliser un spectromètre interférentiel.

Dans la seconde partie, on propose une approche des phénomènes de cohérence temporelle, à partir d'un modèle de trains d'ondes valable dans le cas de l'émission par une source laser.

Dans la correction, une grande attention sera portée aux remarques de caractère physique, à la clarté de la rédaction et à la présentation.

Notations et hypothèses :

- On utilise un repère cartésien $Oxyz$, de vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$;
- Les ondes lumineuses sont décrites par une grandeur scalaire dont la valeur à l'instant t en un point M , défini par sa position \vec{r} , est notée indifféremment, soit $s(\vec{r}, t)$, soit $s(M, t)$;
- Une onde monochromatique, de pulsation ω et de vecteur d'onde \vec{k} , peut être représentée par son amplitude complexe \underline{s} , telle que :

$$s(\vec{r}, t) = \mathcal{R}e \{ \underline{s} \} \quad \text{avec} \quad \underline{s} = s_0 e^{i\varphi(\vec{r}, t)}$$

où s_0 est une constante réelle positive, et où la phase $\varphi(\vec{r}, t)$ de l'onde au point \vec{r} et à l'instant t a pour expression :

$$\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$$

- Le déphasage en M entre deux ondes d'indices (1) et (2) est noté :

$$\psi_{12}(\vec{r}, t) = \varphi_1(\vec{r}, t) - \varphi_2(\vec{r}, t)$$

- La célérité de la lumière dans le vide est notée c .

1 Interféromètre de Michelson utilisé en lame d'air à faces parallèles

Une onde incidente, issue d'une source située dans un domaine (\mathcal{D}_i) , donne naissance à deux ondes (1) et (2), transitant dans les domaines (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) , et interférant dans le domaine (\mathcal{D}) en un point M (figure 1). Le domaine (\mathcal{D}) correspond au champ d'interférences.

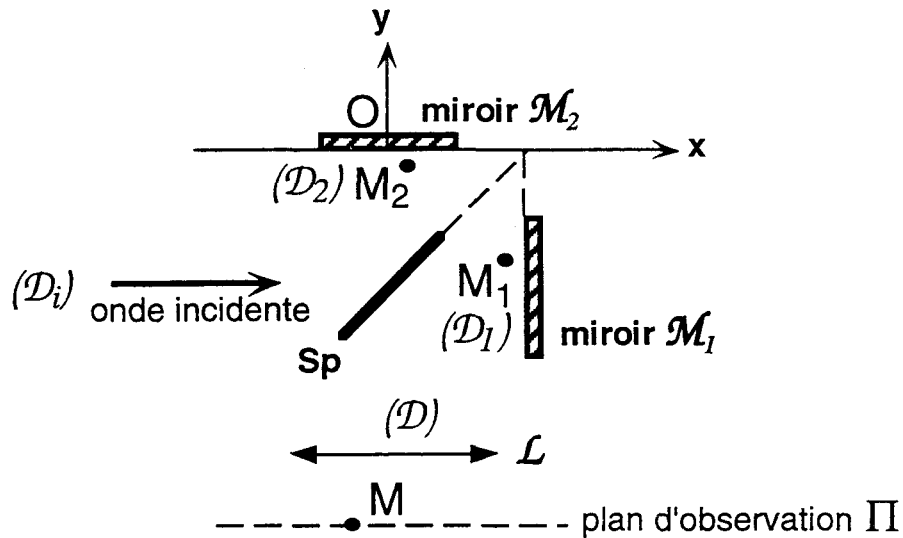


Figure 1 : Schéma de principe de l'interféromètre de Michelson.

On considère un interféromètre idéal, pour lequel :

- la lame séparatrice Sp est d'épaisseur nulle, et fournit deux ondes de même intensité ;
- les éventuels déphasages introduits dans la réflexion des ondes sur Sp sont compensés par des dispositifs non représentés ;
- les miroirs \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , perpendiculaires au plan de la Figure 1, sont parfaitement plans, et ont des orientations fixes avec un angle égal à $\pi/4$ par rapport à l'orientation de la lame séparatrice Sp . Le point O , origine du repère $Oxyz$, est pris au centre du miroir \mathcal{M}_2 ;
- la figure d'interférences est observée sur un plan Π normal à Oy , par projection à l'aide d'une lentille \mathcal{L} , parfaitement stigmatique ;
- les ondes se propagent dans un milieu dont l'indice de réfraction vaut 1.

1.1 Question préliminaire

Une onde (1) et une onde (2) se propagent respectivement dans (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) vers la séparatrice Sp , et se superposent dans (\mathcal{D}) après traversée de la lentille \mathcal{L} . Soit M un point de l'écran d'observation Π . M_2 est le conjugué de M par la lentille \mathcal{L} dans le domaine (\mathcal{D}_2) , et M_1 est le point de (\mathcal{D}_1) symétrique de M_2 par rapport à Sp (cf. figure 1).

Expliquer pourquoi le déphasage $\psi_{12}(M, t)$ entre les deux ondes en M s'écrit :

$$\psi_{12}(M, t) = \varphi_1(M_1, t) - \varphi_2(M_2, t)$$

en fonction des phases respectives $\varphi_1(M_1, t)$ et $\varphi_2(M_2, t)$ des ondes (1) et (2) aux points M_1 et M_2 .

1.2 Figure d'interférences

Le miroir \mathcal{M}_2 est initialement confondu avec l'image de \mathcal{M}_1 par Sp . Le miroir \mathcal{M}_1 subit alors une translation de longueur l , parallèlement à l'axe Ox , et comptée positivement si le miroir s'est éloigné de sa position initiale par rapport à la lame séparatrice Sp (figure 2a).

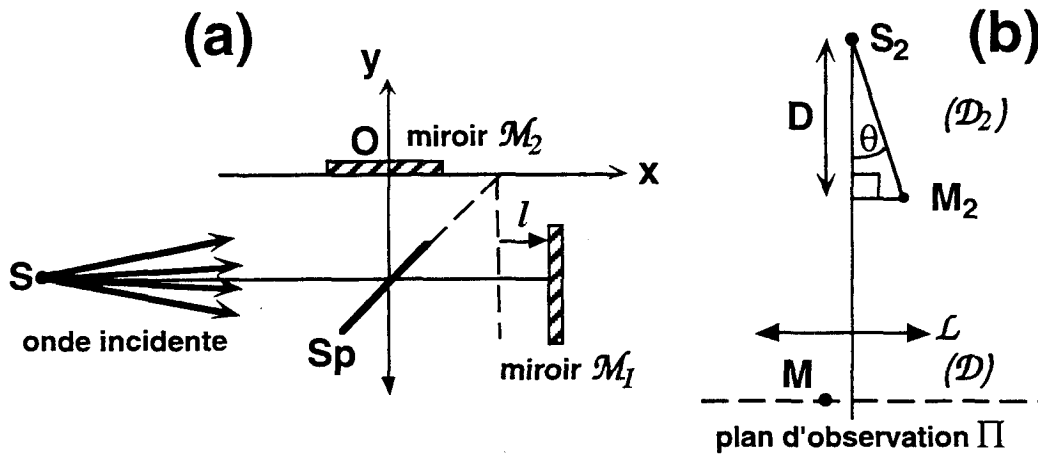


Figure 2 : a) Interféromètre de Michelson réglé en lame d'air à faces parallèles, éclairé par une source lumineuse S placée à distance finie. b) Notations utilisées pour le calcul du déphasage $\psi_{12}(M, t)$ entre les deux ondes (1) et (2) arrivant en M .

1.2.1 Un faisceau lumineux, monochromatique de longueur d'onde λ_0 , est issu d'une source ponctuelle S , située dans le domaine (\mathcal{D}_i) et placée à distance finie.

S_1 et S_2 sont les images de S dans les domaines (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) par le système optique formé de Sp , \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 . S'_1 désigne l'image de S_1 dans le domaine (\mathcal{D}_2) par Sp .

- a) Comment peut-on réaliser expérimentalement une source S quasi-ponctuelle ?
- b) Déterminer la distance entre S_2 et S'_1 .
- c) On note I_0 l'intensité obtenue en M en occultant un miroir. Le point M_2 de (\mathcal{D}_2) est repéré par la distance D et l'angle θ (figure 2b).
Exprimer l'intensité lumineuse en M en fonction des paramètres I_0 , λ_0 , l , D et θ . On se limitera aux termes du second ordre en θ , et on supposera $l \ll D$.
En déduire que la figure d'interférences obtenue sur l'écran Π est formée d'anneaux concentriques.
- d) La lentille et l'écran sont placés de façon à obtenir un grandissement γ . On suppose que le centre des anneaux correspond à un maximum d'intensité. Déterminer, en fonction des paramètres γ , λ , l , D et n , le rayon R_n du n -ième anneau lumineux, compté à partir du centre.
- e) Décrire l'évolution de la figure d'interférences lorsqu'on augmente progressivement l à partir d'une valeur initiale nulle.
- f) La figure d'interférences est-elle localisée ?
- g) Décrire qualitativement son évolution si on déplace la source S perpendiculairement à l'axe Ox .

1.2.2 Le faisceau incident est maintenant issu d'une source étendue incohérente, monochromatique de longueur d'onde λ_0 , et située dans un plan perpendiculaire à l'axe Ox placé à distance finie. Cette source est circulaire, de rayon R et de centre S .

- a) Décrire comment se trouve modifiée la figure d'interférences.
- b) On suppose que le nombre N_v d'anneaux visibles est grand. Evaluer l'ordre de grandeur de N_v en fonction des paramètres λ_0 , D , l et R . *Tout calcul du contraste des franges d'interférences est en-dehors de la réponse à cette question.*
- c) Comment placer l'écran d'observation Π par rapport à la lentille \mathcal{L} pour rendre maximal le nombre d'anneaux théoriquement visibles ? Ce maximum dépend-il alors du rayon R de la source ?
- d) Montrer que, dans ces conditions, la figure d'interférences est localisée, et indiquer quel est le plan de localisation des interférences.
Calculer le rayon R_n du n -ième anneau lumineux, compté à partir du centre supposé correspondre comme précédemment à une interférence constructive.

1.3 Spectrométrie interférentielle

Le miroir \mathcal{M}_1 est mobile entre $l = 0$ et $l = L$, ce qui entraîne une variation du chemin optique Δ de $\Delta = 0$ à $\Delta = \Delta_{max}$.

Un détecteur ponctuel, placé au centre du système d'anneaux dans le plan de localisation des interférences, mesure l'intensité $I(\Delta)$. Le mouvement du miroir est commandé par un système informatique qui enregistre la fonction $I(\Delta)$, appelée *interférogramme*. Ce système calcule ensuite numériquement la transformée $F(\omega)$ de la fonction $I(\Delta)$, définie par l'intégrale :

$$F(\omega) = \int_0^{\Delta_{max}} I(\Delta) \cos\left(\frac{\omega\Delta}{c}\right) d\Delta$$

1.3.1 Calculer $F(\omega)$ dans le cas d'une raie monochromatique de pulsation ω_0 , et représenter l'allure de $F(\omega)$.

1.3.2 En déduire l'allure de la courbe $F(\omega)$ dans le cas de deux ondes de pulsations ω_1 et ω_2 , voisines de la pulsation centrale ω_0 . *Aucune étude détaillée de la fonction $F(\omega)$ à représenter n'est exigée.*

1.3.3 Montrer que ce dispositif peut être utilisé comme un spectromètre.

En définissant par vous-même un critère permettant de définir le plus petit écart spectral qui puisse être observé par ce dispositif (et qui sera justifié), évaluer la résolution $\Delta\omega_R$ du spectromètre. En déduire son pouvoir de résolution \mathcal{R} défini par :

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_R}$$

Montrer que \mathcal{R} est fixé par le nombre N_{max} de maxima d'intensité enregistrés par le détecteur, lors de la course finie de l'interféromètre.

1.3.4 On étudie une source lumineuse, dont l'émission est centrée sur la pulsation ω_0 . Si δI_ω est l'intensité lumineuse émise par la source dans la bande spectrale $[\omega, \omega + \delta\omega]$, on définit la densité spectrale en ω par :

$$\mathcal{I}_\omega(\omega) = \frac{\delta I_\omega}{\delta\omega}$$

L'allure de la densité spectrale étudiée est représentée sur la figure 3, et correspond à une raie de largeur caractéristique $\Delta\omega$ autour de ω_0 .

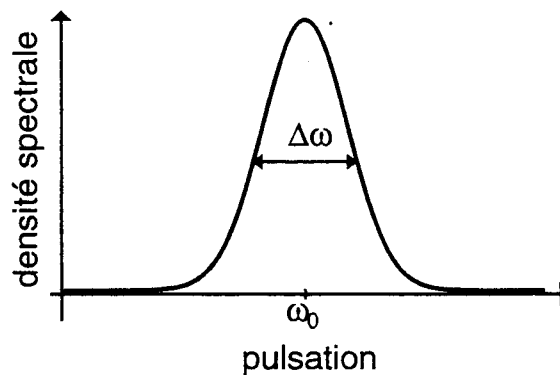


Figure 3 : Densité spectrale d'émission $\mathcal{I}_\omega(\omega)$ d'une raie dont on étudie l'interférogramme $I(\Delta)$ et la transformée $F(\omega)$. L'émission est centrée sur ω_0 avec une largeur caractéristique $\Delta\omega$.

A quelle condition sur $\Delta\omega_R$ pourra-t-on dire que le spectromètre permet d'étudier finement le profil de cette raie ?

2 Cohérence temporelle d'une source laser

2.1 Modèle des trains d'ondes

On admet qu'une source *laser* émet une onde d'amplitude constante au cours du temps avec une phase pouvant présenter des discontinuités. On modélise ainsi l'émission du laser par une succession de trains d'ondes sinusoïdales de pulsation ω_0 , d'amplitude s_0 fixée et de durée aléatoire τ_e .

Le champ émis par cette source, et vu à l'instant t par un photodétecteur fixe, s'écrit alors :

$$\underline{s}(t) = s_0 e^{i[\omega_0 t + \varphi(t)]}$$

où, comme représenté sur la figure 4, la phase $\varphi(t)$ prend une valeur aléatoire, constante sur toute la durée τ_e d'un train d'onde donné, et variant de façon totalement aléatoire d'un train d'ondes à l'autre. La durée moyenne τ_c des trains d'ondes est appelée temps de corrélation et on suppose $\omega_0 \tau_c \gg 1$.

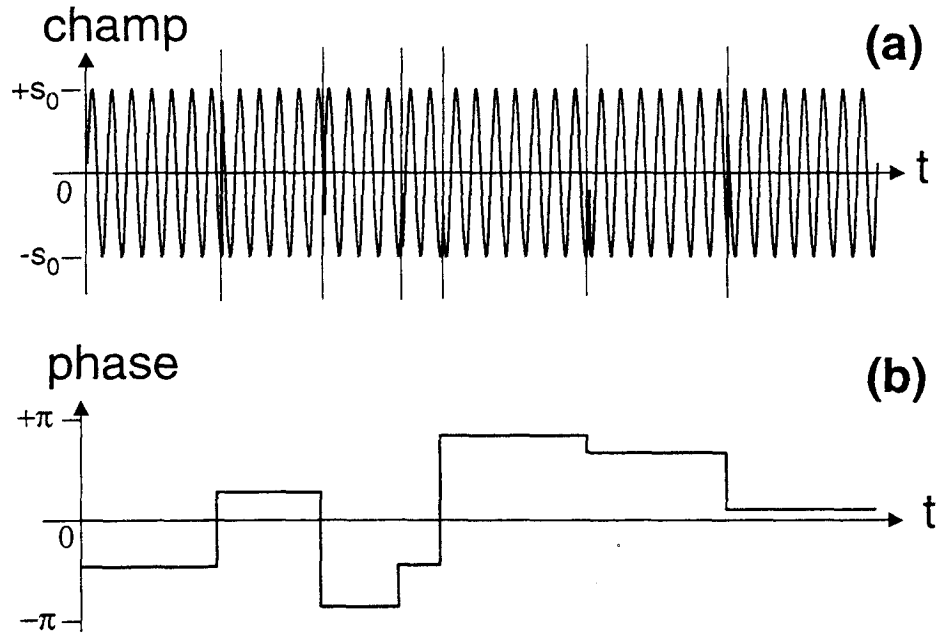


Figure 4 : Trains d'ondes émis par la source. Les lignes verticales représentées en (a) correspondent aux discontinuités de la phase $\varphi(t)$ (dont l'évolution est représentée en (b)). La quantité $\omega_0 \tau_c \gg 1$ est représentée de façon non réaliste, afin de montrer clairement l'effet de ces changements de phase sur le champ $s(t)$.

Le photodétecteur, supposé suffisamment rapide, délivre un signal électrique $u(t)$ proportionnel à l'intensité lumineuse de l'onde, qui s'écrit :

$$I(t) = \langle s(M, t)^2 \rangle_T = \frac{1}{2} [\underline{s}(t) \underline{s}(t)^*]$$

où $\langle \dots \rangle_T$ représente la moyenne temporelle sur une période $T = 2\pi/\omega_0$ d'oscillation de l'onde lumineuse.

2.1.1 Montrer que le signal $u(t)$ de photodétection ne fluctue pas, c'est-à-dire ne présente pas de variations temporelles aléatoires.

2.1.2 Un interféromètre sépare l'onde issue du laser en deux ondes de même amplitude $s_0/2$, qui suivent deux chemins (1) et (2) et interfèrent ensuite sur le photodétecteur. On note ψ le déphasage dû à la différence de chemin optique entre les deux voies de l'interféromètre, qui correspond à un retard τ d'une voie par rapport à l'autre tel que :

$$\psi = \omega_0 \tau$$

a) Exprimer l'intensité $I(t)$ mesurée par le détecteur en fonction des paramètres s_0 , ψ , $\varphi(t + \tau)$ et $\varphi(t)$.

Cette intensité $I(t)$ fluctue-t-elle ? Quelles sont ses valeurs extrêmes ?

b) On définit les fonctions de corrélation de la phase $\varphi(t)$ par :

$$\begin{cases} f_1(\tau) = \langle \cos[\varphi(t + \tau) - \varphi(t)] \rangle \\ f_2(\tau) = \langle \sin[\varphi(t + \tau) - \varphi(t)] \rangle \end{cases}$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne temporelle sur une durée grande devant τ_c .

On suppose pour simplifier que tous les trains d'onde ont la même durée τ_c (avec $\omega_0 \tau_c \gg 1$). En utilisant le fait que, si les instants t et $t + \tau$ correspondent à deux trains d'ondes différents, la phase $\varphi(t + \tau)$ est totalement indépendante de la phase $\varphi(t)$, justifier que dans ce cas :

$$\begin{cases} f_1(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{\tau_c} \text{ pour } |\tau| \leq \tau_c \text{ et } f_1(\tau) = 0 \text{ pour } |\tau| \geq \tau_c \\ f_2(\tau) = 0 \text{ quel que soit } \tau \end{cases}$$

En déduire la valeur moyenne $\langle I(t) \rangle$ de l'intensité à la sortie de l'interféromètre, et donner l'allure de sa variation en fonction de τ .

c) Par rapport à celles obtenues à la question précédente, une étude statistique plus fine amène aux expressions suivantes des fonctions de corrélation :

$$\begin{cases} f_1(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_c} \\ f_2(\tau) = 0 \end{cases}$$

Calculer et représenter $\langle I(t) \rangle$ avec ces nouvelles expressions.

2.2 Répartition spectrale d'émission

On modélise maintenant l'onde émise par le laser par une superposition continue d'ondes monochromatiques centrées sur ω_0 , et de densité spectrale (définie à la question 1.3.4) donnée par une fonction lorentzienne :

$$I_\omega(\omega) = \frac{A}{1 + B^2(\omega - \omega_0)^2}$$

où A et B sont deux constantes positives.

2.2.1 Représenter $\mathcal{I}_\omega(\omega)$ et calculer la largeur spectrale $\Delta\omega$ de la source, définie comme la largeur totale à mi-hauteur de cette fonction.

2.2.2 Calculer, en fonction du retard τ entre les deux voies, l'intensité $I(\tau)$ à la sortie de l'interféromètre. On pourra utiliser pour cela la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega u)}{1 + B^2(\omega - \omega_0)^2} d\omega = K \cos(\omega_0 u) e^{-|u|/B}$$

où K est une constante qu'on ne cherchera pas à exprimer.

2.2.3 En comparant ce modèle avec celui des trains d'ondes, donner la relation entre la largeur spectrale $\Delta\omega$ de la source et le temps de corrélation τ_c de l'émission.

2.2.4 Application numérique :

Calculer la largeur spectrale (en fréquence) pour les deux valeurs particulières suivantes $\tau_c^{(1)}$ et $\tau_c^{(2)}$ du temps de corrélation :

$$\tau_c^{(1)} = \frac{1}{2\pi} 2 \cdot 10^{-9} \text{ s} \quad \tau_c^{(2)} = \frac{1}{2\pi} 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

La différence de marche maximale de l'interféromètre est en pratique limitée à une longueur de 1 m. En utilisant le résultat de la question 1.3.4, calculer la résolution en fréquence de l'interféromètre, et indiquer s'il est possible de mesurer avec cet appareil la largeur spectrale d'émission d'un laser ayant un temps de corrélation τ_c égal soit à $\tau_c^{(1)}$, soit à $\tau_c^{(2)}$.

Ce résultat est-il cohérent avec le modèle des trains d'ondes étudié précédemment, compte-tenu du retard maximal τ_{max} pouvant être introduit entre les deux voies de l'interféromètre ?

2.3 Battements entre deux lasers

On recombine les faisceaux provenant de deux lasers indépendants, à l'aide d'une lame séparatrice Sp (figure 5).

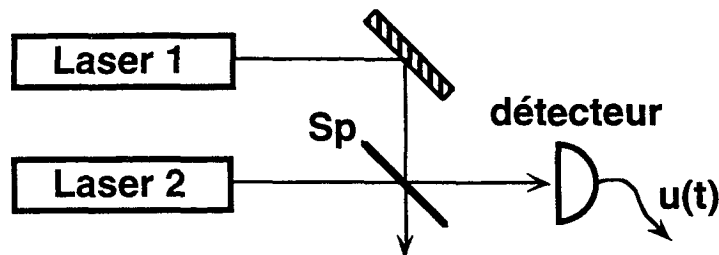


Figure 5 : Battements entre deux lasers.

Les deux ondes émises ont même amplitude s_0 , et correspondent à des trains d'ondes de pulsations ω_1 et ω_2 très légèrement différentes.

Les phases correspondant aux deux ondes arrivant sur le détecteur sont notées $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$, et on suppose qu'elles suivent le même type de fluctuations temporelles, caractérisées comme précédemment par un temps de corrélation τ_c .

On note $\psi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ le déphasage entre les deux ondes, et on admet que $\psi(t)$ suit la même forme de loi statistique que $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$:

$$\langle \cos[\psi(t + \tau) - \psi(t)] \rangle = e^{-2|\tau|/\tau_c} \quad \langle \sin[\psi(t + \tau) - \psi(t)] \rangle = 0$$

2.3.1 On suppose que le photodétecteur a un temps de réponse plus court à la fois que τ_c et que $1/|\omega_1 - \omega_2|$.

a) En fonction des paramètres s_0 , ω_1 , ω_2 et $\psi(t)$, exprimer l'intensité $I(t)$ qu'il mesure.

b) Décrire qualitativement les variations de $I(t)$ et calculer la valeur moyenne $\langle I(t) \rangle$, dans les deux cas limites $\tau_c \gg 1/|\omega_1 - \omega_2|$ et $\tau_c \ll 1/|\omega_1 - \omega_2|$.

2.3.2 Le signal électrique à la sortie du photodétecteur est traité par un système qui détermine la fonction de corrélation de l'intensité $g(\tau)$, définie par :

$$g(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}$$

et dans laquelle la variation en fonction du retard τ est effectuée directement par le système utilisé pour le traitement du signal photoélectrique reproduisant $I(t)$.

a) Calculer $g(\tau)$ en admettant que $\langle \cos[\omega t + \varphi(t)] \rangle = 0$ pour tout ω .

b) Tracer le graphe de $g(\tau)$ à la limite où $\tau_c \gg 1/|\omega_1 - \omega_2|$.

c) Montrer que la détermination de ces *corrélations d'intensité* permet de mesurer la largeur spectrale d'un laser de faible largeur spectrale (correspondant par exemple à $\Delta\omega/2\pi = 1$ MHz), alors que cette mesure est irréalisable en pratique avec la méthode de spectrométrie interférentielle décrite précédemment à la question 1.3.

2.4 Auto-battement d'un laser

On considère comme précédemment le cas d'un laser de faible largeur spectrale ($\Delta\omega/2\pi = 1$ MHz), qu'on injecte dans l'interféromètre de Michelson. On introduit dans une des deux voies de l'interféromètre (correspondant par exemple au domaine (\mathcal{D}_1)) une fibre optique, permettant de guider la propagation de l'onde sur une longueur de 1 km. L'indice de réfraction de la fibre optique est $n = 1,5$.

2.4.1 Montrer que ce dispositif permet d'obtenir entre les deux voies un retard τ_M grand devant $1/\Delta\omega$.

2.4.2 Calculer l'intensité instantanée $I(t)$ à la sortie de l'interféromètre, et sa moyenne $\langle I(t) \rangle$.

2.4.3 Montrer qualitativement que $I(t)$ présente des fluctuations dont les caractéristiques sont reliées à la largeur spectrale $\Delta\omega$ du laser.

2.4.4 On analyse ces fluctuations en déterminant leur fonction de corrélation $g(\tau)$ définie précédemment.

a) Montrer qu'il est possible de mesurer le temps de corrélation τ_c , et de déterminer ainsi $\Delta\omega$, sans qu'il soit nécessaire d'utiliser un autre laser.

b) A cause des dérives thermiques et de la grande longueur de fibre optique nécessaire, la différence de marche Δ entre les deux voies de l'interféromètre fluctue en pratique de beaucoup plus qu'une longueur d'onde pendant le temps nécessaire à la détermination de $g(\tau)$.

Reprendre les questions précédentes dans le cas où ces fluctuations de chemin optique sont soit plus lentes, soit plus rapides que τ_c .

