e 3 a
concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de PHYSIQUE

Filière PC

durée 4 heures

---

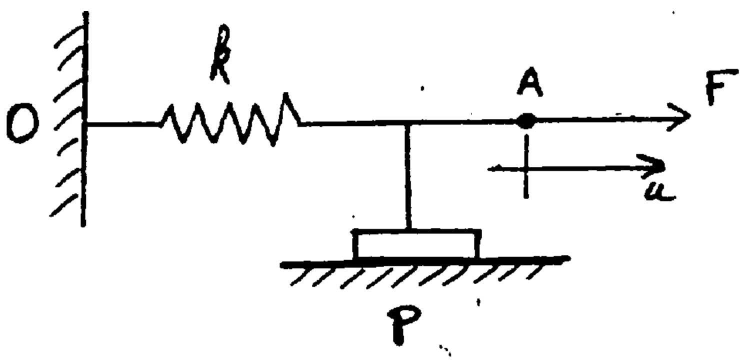
1. MECANIQUE: MODELISATION D'UN CABLE DE PRECONTRAINTE

On étudie successivement un élément mécanique simple, puis la mise en série d'un grand nombre de ces éléments. On conclura sur la modélisation d'un câble de précontrainte.

A - Elément de base.

Le système est constitué de l'association d'un ressort linéaire de constante k et d'un patin P.

Ce patin est tel qu'il ne se déplace que s'il est soumis à une force F (cf. schéma) supérieure à un seuil déterminé F_0, force de frottement demeurant constante quel que soit le mouvement.



Une extrémité du ressort est fixée en un point 0, l'autre extrémité A est soumise, à partir de sa position d'équilibre statique, à la force de traction longitudinale F. On note u le déplacement du point A.

1 - Exprimer le déplacement u du point A en fonction de F.

2 - Faire le graphe de u(F).

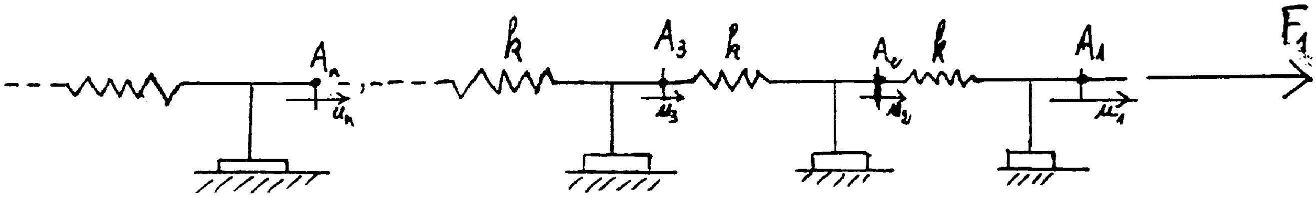
On fait croître la force F jusqu'à une valeur maximale F_M, puis on la laisse décroître, progressivement jusqu'à F = 0.

3 - Décrire le comportement du système en fonction de la valeur atteinte par F_M. On dégagera trois modes de fonctionnement selon la valeur atteinte par F_M.

4 - Expliciter avec précision la situation ci-dessus sur le graphe de u(F).

B - Généralisation.

Le système est maintenant constitué de la mise en série de N éléments de base tels que décrits dans la partie A.



On note A_i les points de jonctions successifs et u_i leurs déplacements par rapport à l'état d'équilibre où les ressorts sont tous à leur longueur au repos. On applique la force F_1 au nœud A_1 (cf. schéma).

5 - Donner l'expression de l'équilibre des forces en chacun des nœuds A_i.

6 - En déduire la condition portant sur F_1 pour que soit observé un déplacement u_i du nœud A_i.

7 - Dans la situation de la question précédente, donner la condition pour laquelle le nœud A_{i+1} ne se déplace pas.

8 - Donner de même, la condition pour laquelle le nœud A_{i+1} est entraîné.

9 - On se place dans l'hypothèse de la question 7 : $u_i > 0$ et $u_{i+1} = 0$
Le nombre N d'éléments est supposé suffisant grand pour ne pas intervenir dans le problème.
Exprimer le déplacement u_l du nœud A_1 en fonction de F_1, F_0, k et i.

10 - Faire le graphe de la fonction u_l (F_1)
[ce graphe est le premier modèle de la mise sous tension d'un câble de précontrainte].

11 - Etablir, en fonction des paramètres F_0 et k, l'équation de la courbe continue $u_l=f(F_1)$ passant par l'ensemble des points de discontinuité constatés aux questions 9 et 10.

12 - Pour passer au comportement d'un câble continu, on assimile ce dernier à un assemblage d'éléments de base de longueur très faible δx. Pour un matériau élastique linéaire (ex : acier), la raideur équivalente k de chaque élément est inversement proportionnelle à sa longueur δx.

On pose: $k = \dfrac{\alpha}{\delta x}$

On considère également le frottement comme constant le long du câble.

On pose $F_0 = \beta\delta x$.
Etablir, dans ces hypothèses, l'expression de la fonction $u_l= g(F_1)$ lorsque $\delta x \to 0$.

13 - Faire le graphe de $u_l = g(F_1)$.
Commenter.

II. **ONDES MAGNETOHYDRODYNAMIQUES.**

On considère un fluide conducteur parfait (conductivité σ infinie) compressible soumis à un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$. On négligera ici la viscosité η et les effets de la pesanteur. Ce problème se propose d'examiner différents types d'ondes qui peuvent exister au sein de ce fluide.

Lorsque le fluide est au repos, $\vec{V} = \vec{0}$, le champ magnétique est $\vec{B}_0$, la masse volumique est ρ_0 et la pression P_0.

Lorsque le fluide est perturbé à partir de l'état d'équilibre, la vitesse est $\vec{V}$.

Pour analyser le comportement des ondes dans ce fluide, on écrira un jeu d'équations fondamentales.

1°) Dans le référentiel du laboratoire, la loi d'Ohm prend la forme $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$.

Comment s'écrit, dans le cas d'un conducteur parfait, l'équation de Maxwell-Faraday donnant les variations temporelles du champ magnétique $\vec{B}$?

2°) Ecrire l'équation de continuité et l'équation du mouvement du fluide dans lequel on écrira la force volumique magnétique. Montrez que si l'on néglige le courant de déplacement $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère, elle s'écrit: $\vec{F}_m = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right) \wedge \vec{B}$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du milieu.

3°) On dispose ainsi d'un système de trois équations avec trois inconnues ρ, $\vec{V}$, $\vec{B}$.

On suppose de petites déviations par rapport à l'équilibre telles que

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{r},t) \qquad |\rho_1| << \rho_0$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1(\vec{r},t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r},t) \qquad |\vec{B}_1| << |\vec{B}_0|$$

3°-a) Montrez qu'au premier ordre en $\vec{V}_1$, $\vec{B}_1$, ρ_1, on obtient :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 div\vec{V}_1 = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\, p_1 + \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{B}_1 = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{B}_0\right)$$

3°-b) L'équation constitutive du milieu s'écrit P = f(ρ) ainsi $\overrightarrow{grad}\, p_1 = V_s^2\, \overrightarrow{grad}\, \rho_1$ où V_s est la vitesse de propagation du son. Calculez son expression en fonction de P_0, ρ_0, γ, si l'équation d'état correspond à une adiabatique $P = k\rho^{\gamma}$ où γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

4°) En posant $\vec{V}_A = \dfrac{\vec{B}_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}}$, montrez que l'on obtient pour la vitesse de la perturbation $\vec{V}_1$

représentée par l'onde :

$$\frac{\partial^2 \vec{V}_1}{\partial t^2} - V_s^2\, \overrightarrow{grad}\left(div \vec{V}_1\right) + \vec{V}_A \wedge \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_A\right)\right) = \vec{0}$$

a - En utilisant l'analyse dimensionnelle, montrez que $\vec{V}_A$ est homogène à une vitesse (vitesse de Alfven).

b – Comparez V_s à V_A dans le cas du soleil pour lequel $\rho = 10^{23}$ atomes.m^{-3} et $B_0 = 10^{-4}$ Tesla.

Pour un métal liquide, comme le mercure, dans quel sens évoluent ces vitesses ?

5°) On va envisager plusieurs cas simples pour les ondes dans ce milieu. On considère une onde plane de la forme

$$\vec{V}_1(\vec{r},t) = \vec{V}_1 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

et on va traiter deux cas : $\vec{k}$ perpendiculaire à $\vec{B}_0$ puis $\vec{k}$ parallèle à $\vec{B}_0$ (ou $\vec{V}_A$). En utilisant l'équation trouvée au 4°) on obtient dans le cas général la relation de dispersion

$$-\omega^2 \vec{V}_1 + (V_s^2 + V_A^2)(\vec{k}\vec{V}_1)\vec{k} + \vec{V}_A \vec{k}\left[\left(\vec{V}_A \vec{k}\right)\vec{V}_1 - \left(\vec{V}_A \vec{V}_1\right)\vec{k} - \left(\vec{k}\vec{V}_1\right)\vec{V}_A\right] = \vec{0}$$

a - Supposons que le vecteur d'onde $\vec{k}$ soit perpendiculaire à $\vec{B}_0$. *Montrez* alors que $\vec{V}_1$ est parallèle à $\vec{k}$ et que la relation de dispersion ω*(k)* s'écrit $\omega^2 = k^2 (V_S^2 + V_A^2)$

Que peut-on en conclure sur la nature de l'onde ?

En déduire l'expression de $\vec{B}_1$ et décrire physiquement, ou à l'aide d'un schéma, la propagation de cette onde.

b - On se place ici dans le cas où $\vec{k}$ est parallèle à $\vec{B}_0$, deux cas particuliers sont à examiner:

1 - Cas d'une onde longitudinale : $\vec{k}$ est parallèle à $\vec{V}_1$

Montrez que la vitesse de phase est la vitesse d'une onde sonore . En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$.

2 - Cas d'une onde transverse : $\vec{k}$ est perpendiculaire à $\vec{V}_1$.

Montrez que la vitesse de phase est la vitesse de l'onde d'Alfven définie précédemment. En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$. Décrivez la propagation de cette onde en utilisant au besoin un schéma.

6°) On prend en compte un terme de viscosité qui, dans l'expression des forces rajoute un terme en $\eta \Delta \vec{V}_1$.

En reprenant l'analyse détaillée dans les questions précédentes, on peut montrer que dans le cas d'onde telle que $\vec{k}$ soit parallèle à $\vec{B}_0$, on obtient la relation de dispersion ω(k) sous la forme : $k^2 V_A^2 = \omega^2 (1 + \dfrac{i\eta k^2}{\rho_0 \omega})$

a - Trouvez l'expression k(ω) dans le cas d'une très faible viscosité.

b - Pouvez-vous décrire brièvement les phénomènes physiques qui vont apparaître et donner l'expression d'une longueur d'atténuation ?

7°) Les considérations précédentes sur les ondes magnétohydrodynamiques ne sont valables qu'à basses fréquences. Pourquoi ? Pouvez-vous décrire qualitativement les phénomènes physiques susceptibles de venir modifier l'analyse décrite dans ce problème ?