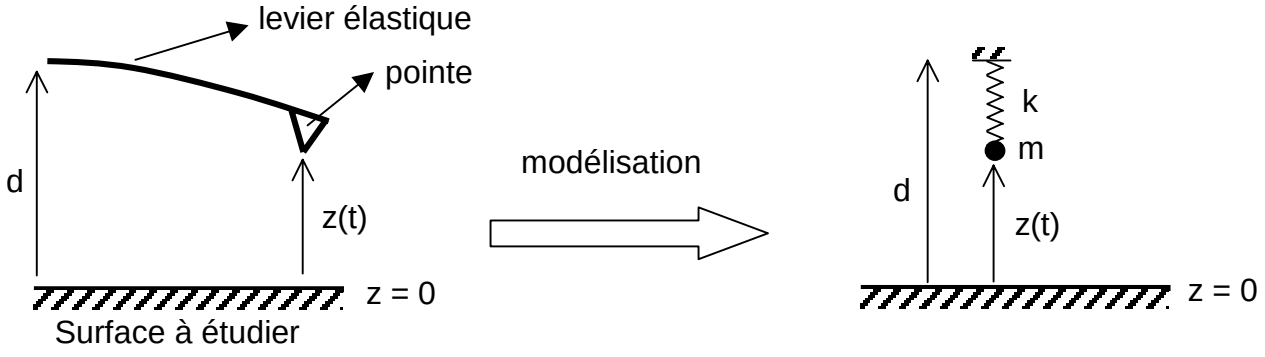
## Problème I : Microscope à force atomique

Ces dernières années, de nouvelles techniques dites de "microscopies à champ proche" se sont développées pour étudier les surfaces. Parmi ces techniques, le microscope à force atomique permet de déterminer les caractéristiques topographiques, électriques ou magnétiques de la surface étudiée en mesurant la force exercée sur une fine pointe fixée à l'extrémité d'un levier élastique et placée à une distance comprise entre une fraction et quelques dizaines de nanomètres de la surface. Ce problème étudie le comportement mécanique de l'ensemble levier-pointe dans deux modes de fonctionnement classiques du microscope à force atomique. Les deux parties sont largement indépendantes.

Dans tout le problème, on modélise le système levier-pointe par une masse ponctuelle m fixée à un ressort sans masse, de longueur à vide nulle et de raideur k. La position instantanée de la pointe est notée z(t), l'origine des ordonnées étant prise sur la surface à étudier. On note d la distance entre la surface et l'extrémité du ressort. On suppose de plus que l'interaction pointe-surface est décrite par une énergie potentielle notée U(z). La force correspondante sera notée F(z). On néglige la force de pesanteur.



## Partie A : Mode contact

En mode dit "contact", lorsque la pointe est approchée de la surface, elle est soumise à une force atomique qui induit une déflexion du levier que l'on peut mesurer optiquement avec une grande sensibilité. On s'intéresse ici à quelques aspects de ce mode de fonctionnement liés à la stabilité des positions d'équilibre de la pointe.

1) En supposant d fixée, écrire la condition d'équilibre de la pointe.

2) Soit $z_0$ une position d'équilibre de la pointe. En linéarisant l'équation du mouvement de la pointe au voisinage de $z_0$, montrer que la condition de stabilité de cet équilibre est :

$$k + \left.\frac{d^2U}{dz^2}\right|_{z=z_0} > 0$$

On suppose dans toute la suite de cette partie que U(z) a pour expression :

$$U(z) = \frac{A}{z^7} - \frac{B}{z} \quad \text{avec } A \approx 10^{-88}\,\text{Jm}^7 \quad \text{et} \quad B \approx 10^{-29}\,\text{Jm}.$$

3) a) Représenter précisément les graphes de U(z) et F(z). Commenter.

   b) Proposer une méthode graphique pour déterminer les positions d'équilibre de la pointe lorsque d est fixée.

   c) Montrer que lorsque k est supérieur à une valeur critique $k_c$ que l'on déterminera, toutes les positions d'équilibre sont stables, quelle que soit la valeur de d.
   <u>Application numérique</u> : évaluer $k_c$.

4) On suppose que la pointe est à l'équilibre à une distance $z_0$ de la surface telle qu'elle se trouve dans la partie répulsive de la courbe d'interaction ($F(z_0) > 0$). Cet équilibre est-il stable ? Montrer qu'une variation $\delta d$ de la distance d entraîne une variation $\delta z$ de la distance pointe surface donnée par :

$$\delta z = \delta d \left[ 1 - \frac{1}{k}\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0} \right]^{-1}$$

Evaluer $\frac{1}{k}\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z_0}$ pour $z_0$ = 0,1 nm après avoir vérifié qu'un telle position correspond bien à $F(z_0) > 0$. On prendra k = 100 $N.m^{-1}$.
En déduire que dans de telles conditions, une mesure de l'allongement du ressort lorsqu'on déplace la pointe au dessus de la surface donne directement la topographie de celle-ci.

5) On suppose $k < k_c$ . On part d'une situation où l'on peut négliger l'interaction pointe surface (d très grand) et on approche très lentement le levier de la surface (d diminue). A l'aide de la méthode graphique établie au 3) b), décrire qualitativement les variations d'allongement du ressort et montrer que la pointe se rapproche brutalement de la surface dès que la distance pointe-surface atteint une valeur $z_c$ que l'on déterminera.
On continue ensuite d'approcher le levier de la surface. Que se passe-t-il?
On revient ensuite en arrière en écartant doucement le levier de la surface. Montrer que la pointe s'écarte brutalement de la surface pour une valeur de z différente de $z_c$. Tracer qualitativement les graphes z(d) obtenus lors de l'approche du levier puis de son recul. Comment appelle-t-on le phénomène observé?
<u>Application numérique</u> : Estimer $z_c$ et la force correspondante pour k = 0,1 $N.m^{-1}$.

## Partie B : Mode Résonnant

En mode résonnant, la pointe est à quelques dizaines de nanomètres de la surface et le levier est excité mécaniquement par une force oscillante d'amplitude $F_0$ et de pulsation $\omega$. On étudie comment les propriétés dynamiques du levier sont modifiées par l'interaction pointe-surface. On suppose qu'il existe entre la pointe et son environnement une force de frottement dont l'expression est : $-\gamma\frac{dz}{dt}$ .

1) On suppose dans cette question que la pointe est à une distance de la surface suffisamment grande pour qu'elle ne soit soumise à aucune force.

   a) Ecrire l'équation du mouvement de la pointe et montrer que l'amplitude de ses oscillations a pour expression :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \frac{\gamma^2\omega^2}{m^2}}} \qquad \text{où} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dans toute la suite, on suppose que la force de frottement subie par la pointe est faible de sorte que : $\frac{m\omega_0}{\gamma} >> 1$.

b) Montrer que l'amplitude des oscillations de la pointe présente une résonance à une fréquence que l'on déterminera. Préciser l'amplitude au maximum $A_0$ et montrer que la mi-hauteur de la courbe de résonance correspond à $\omega = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{m}$.

Comment appelle-t-on la quantité définie par $Q = \frac{m\omega_0}{\gamma}$ ?

Montrer également qu'à mi-hauteur de la courbe de résonance, la variation avec la fréquence de l'amplitude de vibration est bien décrite par :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

2) On suppose maintenant que la pointe est soumise à l'interaction avec la surface décrite par l'énergie potentielle U(z) et la force F(z).

a) Ecrire l'équation du mouvement de la pointe.

b) En linéarisant cette équation autour de la position d'équilibre de la pointe $z_0$, montrer que la présence d'une interaction est équivalente à une modification de la raideur du ressort et qu'elle induit un changement de fréquence de résonance donné par:

$$\Delta\omega_0 = -\frac{\omega_0}{2k}\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z=z_0}$$

lorsque $k >> \left(\frac{dF}{dz}\right)_{z=z_0}$.

En supposant que la pointe est suffisament loin de la surface pour que le changement de fréquence $\Delta\omega_0$ soit faible devant la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance, tracer sur un même graphe, les courbes de résonance obtenues en l'absence puis en présence d'interaction.

<u>Application numérique</u> : On suppose que l'expression de l'énergie potentielle d'interaction pointe-surface est celle donnée au A et que la pointe est située à 1 nm de la surface. On donne également $k = 100\ N.m^{-1}$, $\omega_0 = 200KHz$ et $Q = 100$. Les hypothèses ci-dessus sont elles justifiées?

c) On mesure l'amplitude de vibration pour la pulsation $\omega = \omega_0 + \frac{\gamma}{m}$ correspondant à la mi-hauteur de la courbe de résonance sans interaction. En utilisant les résultats du 1) b), montrer que la variation d'amplitude $\Delta A$ introduite par l'interaction pointe-surface est donnée par :

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{Q}{2}\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}$$

<u>Application numérique</u> : on impose $A_0$ = 0,5 nm. Calculer $\Delta A$ avec les valeurs numériques données ci-dessus.
La linéarisation de la force est-elle justifiée dans ces conditions?

d) Comment choisir k pour que $\frac{\Delta A}{A_0}$ soit maximum? En utilisant les résultats de la partie A, montrer qu'il est nécessaire de trouver un compromis entre des variations d'amplitude aisément mesurables et une bonne stabilité du microscope.

---

## Problème II : Interaction d'une onde électromagnétique et d'une onde acoustique

On rappelle les relations d'analyse vectorielle :

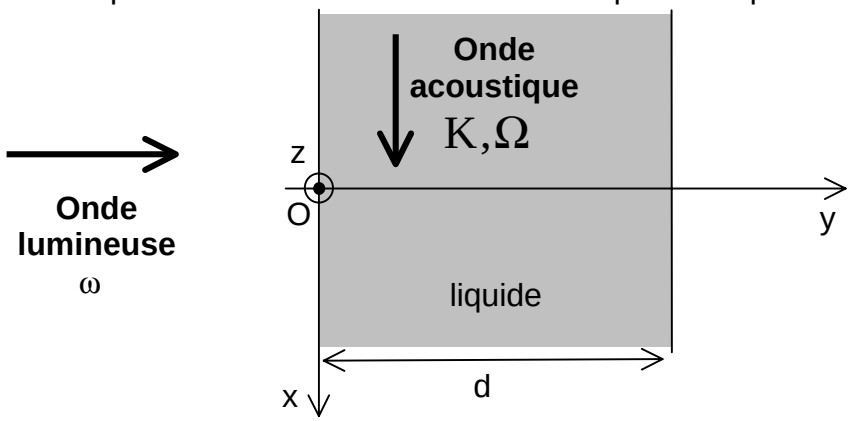
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}A) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}A) - \Delta A$$
$$\text{div}(fA) = f\,\text{div}A + A \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f$$

Dans tout le problème, on note c la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide, $\varepsilon_0$ la permittivité diélectrique du vide, $\mu_0$ sa perméabilité magnétique et on rappelle que c = $3.10^8$ m.s$^{-1}$.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

On considère un liquide contenu dans une cuve parallélépipédique d'épaisseur d = 3 cm, ses deux autres dimensions étant considérées comme très grandes. Le liquide est parcouru par une onde acoustique plane monochromatique de vecteur d'onde $\mathrm{K}$ parallèle à Ox, de pulsation $\Omega$ et de longueur d'onde dans le liquide $\Lambda$. On fait par ailleurs arriver sur la cuve une onde lumineuse plane monochromatique de pulsation $\omega$ et de vecteur

d'onde parallèle à Oy. On suppose de plus que l'onde lumineuse est polarisée rectilignement suivant Oz.

On admet que la variation de masse volumique du liquide associée à la




propagation de l'onde acoustique entraîne une variation de sa permittivité diélectrique relative donnée par:

$$\varepsilon_r(x,t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(Kx - \Omega t)$$

où $\varepsilon_1$ désigne la permittivité relative du liquide en l'absence d'onde acoustique et où $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} << 1$.

1) La fréquence de l'onde acoustique est prise égale à 10 MHz et on donne sa vitesse de propagation dans le liquide V = 1200 m.s$^{-1}$.
   On donne également la longueur d'onde dans le vide de l'onde lumineuse $\lambda_0 = 5.10^{-7}$ m ainsi que la permittivité relative $\varepsilon_1 = 1{,}8$.
   Montrer que l'on peut considérer l'onde acoustique comme "figée" pendant le temps que met la lumière pour traverser la cuve.

   Dans toute la suite, on adoptera donc la loi simplifiée $\varepsilon_r = \varepsilon_r(x) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos(Kx)$ pour décrire l'interaction entre l'onde acoustique et l'onde lumineuse.

2) On cherche à déterminer l'onde électromagnétique dans le liquide. On s'intéresse aux solutions qui ont même pulsation que l'onde incidente et qui, comme elle, sont polarisées rectilignement selon Oz. On écrit donc le champ électrique complexe E dans le liquide sous la forme $E = E(x,y)e^{-i\omega t}e_z$, où $\vec{e}_z$ désigne le vecteur unitaire de l'axe z.

3) a) Ecrire les équations de Maxwell dans le liquide supposé non magnétique et isolant (la densité de charges libres et les courants de

charges libres seront supposés nuls). On ne fera apparaître que les vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et champ magnétique $\vec{B}$, les constantes $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ et la fonction $\varepsilon_r(x)$.

b) En déduire que $\vec{E}$ est solution de l'équation :

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2\varepsilon_1}{c^2}\vec{E} + \frac{\omega^2\varepsilon_2}{c^2}\cos(Kx)\vec{E} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{E}\cdot\frac{\text{grad}(\varepsilon_r(x))}{\varepsilon_r(x)}\right) = 0 \qquad (1)$$

3) a) Commenter l'équation obtenue lorsque $\varepsilon_2 = 0$.

b) En comparant les ordres de grandeurs des 3ème et 4ème termes de l'équation (1), montrer qu'à l'ordre le plus bas, l'interaction entre l'onde lumineuse et l'onde acoustique peut être décrite par l'équation :

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\cos(Kx))E = 0$$

4) a) On cherche $E(x,y)$ sous la forme d'un développement en série de Fourier en x à y fixé, soit :

$$E(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(y)e^{inKx}$$

Quelle est l'idée physique sous-jacente à ce développement?

b) Montrer que les coefficients $a_{n-1}$, $a_n$ et $a_{n+1}$ sont liés par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2a_n}{dy^2} + (k^2 - n^2K^2)a_n + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{k^2}{2}(a_{n+1} + a_{n-1}) = 0$$

où $k = \dfrac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c}$.

5) On cherche à déterminer les coefficients $a_n$ par approximations successives en supposant qu'ils décroissent rapidement avec $|n|$. En première approximation, on suppose tous les $a_n$ nuls, sauf $a_0$.

a) Quelle est l'équation vérifiée par $a_0(y)$ ? Commenter.
Déterminer la forme générale de $a_0(y)$ en introduisant deux constantes d'intégration.

b) On néglige les ondes réfléchies par la cuve en y = 0 et y = d (y = 0 repère la face d'entrée de la cuve). En écrivant les relations de passage du champ électrique en y = 0, déterminer l'expression de $a_0(y)$ en fonction de k, y et de l'amplitude $E_i$ du champ de l'onde incidente sur la cuve. Commenter le résultat obtenu.

6) A l'approximation d'ordre suivant, on conserve l'expression de $a_0(y)$ déterminée en 5.b) et on suppose que tous les $a_n$ sont nuls pour $|n| \geq 2$.

a) Ecrire l'équation différentielle dont sont solutions $a_1(y)$ et $a_{-1}(y)$. Justifier qu'on peut l'écrire avec une bonne approximation sous la forme :

$$\frac{d^2a}{dy^2} + k^2 a = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{k^2}{2}E_i e^{iky}$$

b) On cherche une solution de la forme : $a_1(y) = a_{-1}(y) = Aye^{iky}$
Vérifier qu'une telle solution vérifie les conditions aux limites du problème.
Déterminer la constante A en fonction de $E_i$ , $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ et k.

c) Montrer que des ondes progressives sont associées aux composantes du champ électrique correspondant à $a_1(y)$ et $a_{-1}(y)$ et déterminer leurs directions de propagation.

d) Calculer numériquement à la sortie de la cuve (y = d) le rapport de l'amplitude de l'onde associée à $a_1(y)$ sur l'amplitude de l'onde associée à $a_0(y)$ sachant que $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 10^{-6}$. Que faut-il penser de la méthode de résolution?

3) Plus généralement on peut montrer que les ondes d'ordre n se propagent dans les directions faisant avec Oy les angles $\theta_n$ tels que :

$$\Lambda \sin\theta_n = n\,\lambda \qquad (2)$$

Quel dispositif optique possède un comportement analogue? Préciser numériquement les paramètres physiques d'un tel dispositif pour qu'il ait quantitativement le même effet sur l'onde lumineuse que l'onde acoustique décrite ci-dessus. Commenter les résultats obtenus.

8) On peut associer à une onde lumineuse de vecteur d'onde $k$ des pseudo-particules appelées photons transportant une quantité de mouvement $\hbar k$ où $\hbar$ est la constante de Planck réduite. De même on associe à l'onde acoustique de vecteur d'onde $K$ des pseudo-particules appelées phonons

transportant une quantité de mouvement $\hbar K$. On interprète l'apparition au sein de la cuve des ondes d'indice n > 0 comme un choc au cours duquel un photon absorbe n phonons.

a) Retrouver la relation (2).

b) Que serait de manière analogue le choc traduisant la création des ondes d'indice n < 0 ?

c) On peut aussi affecter aux phonons une énergie $\hbar\Omega$ et aux photons incidents une énergie $\hbar\omega$. Montrer que la conservation de l'énergie au cours du choc permet de prévoir un effet non pris en compte dans le modèle proposé. Pourquoi dit-on alors que le dispositif est un modulateur acousto-optique?