

On se propose d'étudier divers moyens d'obtenir la lévitation de petits objets : utilisation d'un champ électrique, d'un faisceau laser, d'un champ magnétique ou d'une onde acoustique. Il s'agit non seulement de trouver une force qui compense la pesanteur en un point, mais aussi d'obtenir une configuration stable.

Les quatre parties du problème sont indépendantes.

Le problème comporte des questions non calculatoires, pour lesquelles le candidat s'efforcera de répondre avec concision : quelques mots suffisent en général.

Dans tout le problème, le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ est uniforme, avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Partie I - Lévitation électrique

I.A - Étude de la résonance

On considère un circuit RLC série, alimenté par une tension sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$ (figure 1).

I.A.1) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur. Écrire cette équation en introduisant comme seuls paramètres la pulsation propre ω_0 du circuit et le facteur de qualité $Q = L\omega_0/R$.

I.A.2) On cherche en régime forcé $u_c(t)$ de la forme $u_c(t) = U_c\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$. Déterminer U_c/U et ϕ en fonction de ω/ω_0 et Q . Tracer l'allure des courbes U_c/U et ϕ en fonction de ω/ω_0 pour $Q \approx 10$. Rappeler la signification concrète de Q .

I.A.3) On mesure séparément $L = 100\text{mH}$, $C = 100\text{nF}$ et $R = 100\Omega$ avec une incertitude relative de 5%. La mesure du facteur de qualité du circuit RLC série donne par ailleurs $Q = 7,0 \pm 0,5$.

a) Montrer que ces mesures semblent incompatibles. Proposer une explication mettant en jeu la modélisation du générateur BF.

b) Pour vérifier qualitativement l'évolution de ϕ en fonction de ω on utilise l'oscilloscope en mode X-Y. Qu'observe-t-on pour $\omega/\omega_0 \ll 1$, $\omega/\omega_0 \gg 1$ et $\omega = \omega_0$?

I.A.4) On désire relever la courbe de résonance en utilisant le mode wobulation du générateur BF : les signaux sinusoïdaux sont modulés en fréquence par une tension triangulaire, leur pulsation oscillant entre $\omega_{\min} = 3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ et $\omega_{\max} = 3 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ avec une période $\tau = 1 \text{ s}$. On complète le circuit RLC de la figure

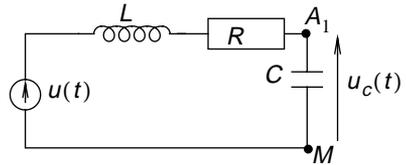
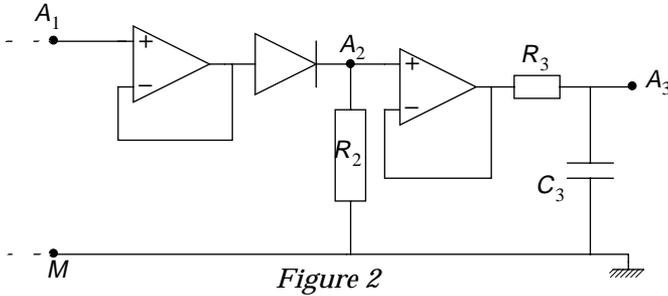


Figure 1

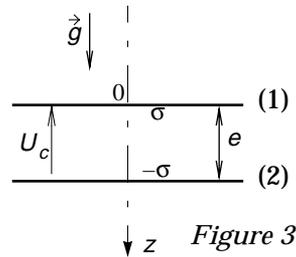
1 conformément à la figure 2. On suppose la diode idéale et le gain des amplificateurs opérationnels infini.



- a) Tracer grossièrement l'allure des tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ aux points A_1 et A_2 pendant la montée du signal triangulaire.
- b) Quel est le rôle des deux circuits à amplificateur opérationnel ?
- c) La valeur $R_3 = 10k\Omega$ étant fixée, comment faut-il choisir C_3 pour que la tension $v_3(t)$ en A_3 fournisse la courbe de résonance du circuit RLC ? Quelle serait l'allure de $v_3(t)$ si on prenait C_3 trop grande ? Même question pour C_3 trop petite.

I.B - Étude d'un condensateur seul

I.B.1) On considère un condensateur plan formé de deux armatures (1) et (2) en regard, assimilables à des disques de surface S et distantes de e et de même axe Oz (figure 3). Le condensateur est soumis à une différence de potentiel U_c constante et l'armature supérieure (1) (respectivement inférieure (2)) porte une densité surfacique de charge uniforme σ (respectivement $-\sigma$).



- a) On néglige les effets de bords, c'est-à-dire qu'on suppose que le champ \vec{E}_1 créé par (1) est de la forme $\vec{E}_1 = E_1(z)\vec{u}_z$. Établir l'expression de \vec{E}_1 en fonction de σ et ϵ_0 .
- b) En déduire l'expression de la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ exercée par (1) sur (2) en fonction de σ , S et ϵ_0 .
- I.B.2) Déterminer le champ total \vec{E} créé par (1) et (2) entre les deux armatures. En déduire que la capacité du condensateur vaut $C = \epsilon_0 S / e$ et exprimer la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ en fonction de U_c , ϵ_0 , S et e .
- I.B.3) L'armature inférieure (2), de masse m , est libre de se translater selon \vec{u}_z . L'armature supérieure (1) est fixe. Le condensateur est soumis à la diffé-

rence de potentiel $u_c(t) = U_c \sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$ et on néglige l'action mécanique des fils électriques.

a) Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), l'expression de la force $F_{1 \rightarrow 2}$ qui a été établie en I.B.1 en régime statique, est valable en régime sinusoïdal forcé à condition de remplacer U_c par $u_c(t)$. De même l'expression de la capacité du condensateur établie en I.B.2 peut être conservée. Justifier la validité de l'ARQS par un calcul d'ordre de grandeur.

b) Établir l'équation différentielle (E) satisfaite par $e(t)$.

c) On remplace, dans toute la suite, dans l'expression de la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}(t)$, $u_c^2(t)$ par sa valeur moyenne dans le temps. À quelle condition, supposée vérifiée, peut-on le faire ?

I.B.4) Montrer qu'il existe toujours une position d'équilibre. Est-elle stable ?

I.C - Étude du condensateur dans le circuit résonant

Le condensateur étudié dans la question I.B fait désormais partie d'un circuit RLC résonant comme celui étudié en I.A.

I.C.1) Écrire l'équation différentielle satisfaite par $e(t)$. On pose $e_0 = \varepsilon_0 SL \omega^2$. En admettant pour simplifier qu'une variation de e a pour effet principal de translater la courbe de résonance, discuter qualitativement la possibilité d'obtenir une position d'équilibre stable, selon que $\omega > \omega_0$ ou $\omega < \omega_0$ où $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_{eq}}$ et où C_{eq} est la capacité du condensateur dans la position d'équilibre.

I.C.2) En posant :

$$x = \frac{e}{e_0} ; e_0 = \varepsilon_0 SL \omega^2 ; k = \frac{U_c^2 L}{2mg e_0 R^2} ; \beta = \frac{e_0 L}{\varepsilon_0 S R^2} ; \tau = t \sqrt{\frac{g}{e_0}}$$

l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = 1 - \frac{k}{1 + \beta(x-1)^2} \quad (1)$$

ce que l'on ne demande pas d'établir. On prend dans la suite $\beta = 1$. On considère la figure 8 (pages 10 à 12) représentant les diagrammes de phase associés à l'équation (1) pour $k = 0,5$, $k = 1,5$ et $k = 3$: $\dot{x} = dx/d\tau$ en ordonnée et x en abscisse ; en pratique, le domaine $x \leq 0$ est sans signification physique.

a) Interpréter sur ces diagrammes la signification des points A , B , C , D et de la courbe (S) qui passe par B .

b) Que traduit la symétrie des diagrammes par rapport à l'axe Ox ?

c) Interpréter le comportement asymptotique pour $x \gg 1$ et $x \gg k$ par référence à un mouvement classique.

I.C.3) Discuter sur l'équation (1) l'existence d'une position d'équilibre selon les valeurs de k . Vérifier la cohérence avec les résultats obtenus en I.C.2.

I.C.4) Discuter la stabilité. Exprimer la valeur e_{eq} de e pour la position d'équilibre stable, en fonction de e_0 et k . Vérifier la cohérence avec l'analyse qualitative de I.C.1.

Partie II - Lévitiation d'une bille diélectrique dans un faisceau laser

On cherche à interpréter de manière qualitative la possibilité de piéger des petites billes diélectriques transparentes, sphériques de rayon $\delta \approx 10\mu\text{m}$ dans un faisceau laser vertical de longueur d'onde $\lambda \approx 600\text{nm}$ dont la section est circulaire de rayon $a \approx 1\text{mm}$. Le dispositif est représenté sur la figure 4 : le faisceau laser est focalisé par une lentille convergente (L) dans une cuve où l'indice vaut n_0 , protégeant des courants d'air ; la bille d'indice $n > n_0$ est placée au fond de la cuve sur une céramique piézoélectrique transparente pour la longueur d'onde du laser.

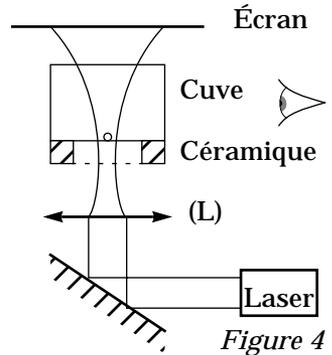


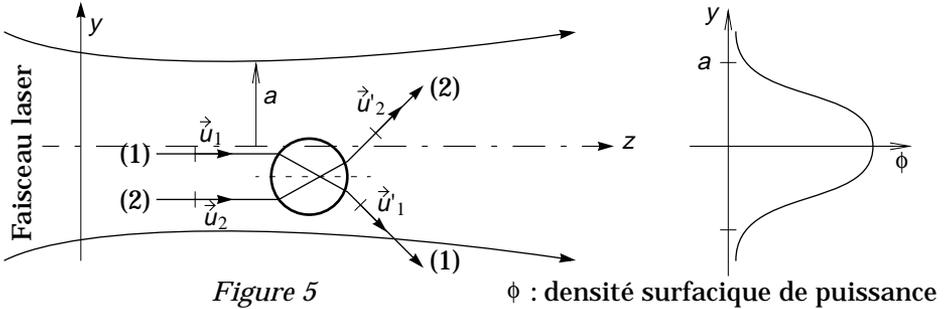
Figure 4

II.A - La bille reposant initialement sur la céramique, on place un écran perpendiculairement au faisceau à une distance $D \approx 1\text{m}$ après la cuve et on retire la lentille (L). Décrire ce que l'on observe sur l'écran selon que la bille est ou n'est pas dans le faisceau laser et évaluer dans les deux cas une distance caractéristique. Conclure sur la manière de s'assurer que la bille est bien dans le faisceau laser.

II.B - On remplace la lentille (L). Lorsque l'on fait vibrer la céramique avec une fréquence $f = 15\text{kHz}$ pendant quelques secondes, la bille lévite dans le faisceau quelques dixièmes de millimètres au-dessus de la céramique et la lévitation subsiste une fois la céramique au repos. En revanche, si on omet de faire vibrer la céramique, la bille reste sur la céramique. Quelle est l'origine des forces qui maintiennent la bille au contact de la céramique ? Interpréter brièvement.

II.C - La figure 5 représente la bille ainsi que la distribution d'énergie (gaussienne) du faisceau laser. On admet qu'un faisceau laser peut être assimilé à un flux de photons, particules possédant toutes la même énergie E et la même quantité de mouvement $\vec{p} = (E/c)\vec{u}$ où $E = hc/\lambda$, c désignant la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide. On considère deux rayons incidents (1) et (2) symétriques par rapport au centre de la bille supposée légèrement décalée

par rapport à l'axe (figure 5). On néglige dans ce modèle simple les réflexions au niveau des interfaces.



II.C.1) Comparer le nombre de photons traversant, pendant une durée infinitésimale dt , une même surface infinitésimale dS de la bille, sur les rayons (1) et (2).

II.C.2) En examinant la quantité de mouvement cédée par les photons sur les trajets (1) et (2), justifier la stabilité latérale.

II.C.3) Sachant de plus que le faisceau laser diverge, justifier la stabilité verticale.

II.D - Pour un matériau donné, la puissance minimale du laser, nécessaire pour faire léviter une bille est proportionnelle à son rayon δ . Interpréter cette observation.

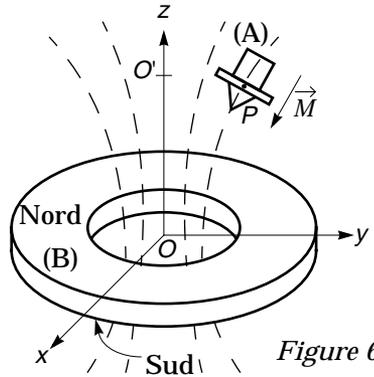
II.E - Comment faut-il choisir le matériau parmi différents diélectriques de masses volumiques voisines et d'indice n différents ?

II.F - Décrire qualitativement l'action du faisceau sur une sphère d'indice $n < n_0$.

II.G - Cette technique de piégeage a des applications multiples, en particulier en biologie pour piéger virus ou bactéries... On peut aussi piéger des atomes isolés, sous réserve de les "refroidir" suffisamment au préalable. Citer un physicien français ayant travaillé sur le refroidissement d'atomes.

Partie III - Lévitation magnétique

Un aimant permanent (B) de forme torique de centre O , d'axe Oz , de section carrée (figure 6) et d'aimantation uniforme parallèle à \vec{u}_z crée un champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace de topologie semblable à celui créé par une spire d'axe Oz . On cherche à faire léviter dans ce champ un aimant permanent (A) ayant la forme d'une toupie de révolution, de masse m , de centre d'inertie P et d'axe \vec{u} , assimilé à un dipôle magnétique de moment $\vec{M} = M\vec{u}$ avec $M > 0$.



L'aimant (B) exerce sur l'aimant (A), de centre d'inertie P , des forces magnétiques de résultante $\vec{F}_m = (\vec{M} \cdot \text{grad})\vec{B}(P)$, de moment au centre d'inertie P , $\vec{\Gamma}_m(P) = \vec{M} \wedge \vec{B}(P)$ et d'énergie potentielle $U_m = -\vec{M} \cdot \vec{B}(P)$.

III.A - Si on abandonne l'aimant (A) en position quelconque au-dessus de l'aimant (B), on constate qu'il s'oriente parallèlement à $\vec{B}(P)$ et qu'il tombe et vient se coller sur l'aimant (B) : toute lévitation magnétique semble donc a priori impossible. Interpréter ces observations à l'aide des expressions ci-dessus.

III.B - Au voisinage d'un point O' de l'axe Oz de cote $Z = OO'$, on repère le centre d'inertie P de l'aimant (A) par des coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'origine O' . On cherche les composantes du champ sous forme d'un développement limité d'ordre deux :

$$B_z(r, z) = B_0 + a_1 r + a_2 z + a_3 r^2 + a_4 z^2 + a_5 r z ;$$

$$B_r(r, z) = b_1 r + b_2 z + b_3 r^2 + b_4 z^2 + b_5 r z$$

et on suppose que l'aimant (B) est orienté pour que B_0 soit positif. On rappelle les expressions :

$$\text{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} ; \quad \text{rot} \vec{B} = \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta.$$

Montrer qu'en réalité le développement est de la forme :

$$B_z(r, z) = B_0 + a_2 z - \frac{a_4}{2} r^2 + a_4 z^2 ; \quad B_r(r, z) = -\frac{a_2}{2} r - a_4 r z$$

et exprimer a_2 et a_4 en fonction des dérivées $\partial B_z / \partial z$ et $\partial^2 B_z / \partial z^2$ prises au point O' .

III.C - On constate qu'il est possible de faire léviter (A) à condition de lui communiquer une vitesse angulaire initiale ω élevée autour de son axe \vec{u} initiale-

ment quasiment parallèle à $-\vec{u}_z$. On constate aussi que ω reste constante et que le moment cinétique barycentrique de (A) vaut approximativement $\vec{\sigma}^* \approx J\omega\vec{u}$ où J est le moment d'inertie par rapport à l'axe de l'aimant, de vecteur directeur \vec{u} : c'est l'approximation gyroscopique, valable si on peut négliger la vitesse angulaire de rotation de \vec{u} par rapport à ω .

III.C.1) Écrire l'équation vectorielle du mouvement guidant l'évolution du moment cinétique $\vec{\sigma}^*$.

III.C.2) On néglige le mouvement de P . Montrer que \vec{u} tourne avec une vitesse angulaire Ω autour de la direction de $\vec{B}(P)$ (mouvement de précession). Exprimer le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ en fonction de M , J , ω et \vec{B} . Comment faut-il choisir ω pour que l'approximation gyroscopique soit valable ?

III.C.3) On constate que lorsque ω est trop élevée, la lévitation est impossible. Pour interpréter cette observation, on fait tendre ω vers l'infini.

- Montrer que \vec{u} garde une direction fixe, qu'on supposera confondue avec $-\vec{u}_z$.
- Exprimer dans ce cas l'énergie potentielle U en fonction de m , g , B_0 , M , a_2 , a_4 , r et z . Donner la condition d'équilibre. Est-il possible d'assurer simultanément la stabilité radiale et axiale ? Conclure.

III.D - Si ω n'est pas trop élevée, on admet que le couplage entre les mouvements de rotation et de translation de (A) assure que \vec{M} s'aligne instantanément sur $-\vec{B}(P)$ lorsque P se déplace.

III.D.1) Écrire l'énergie potentielle U de l'aimant (A) en fonction de M , m , g , z , $\|\vec{B}(P)\|$. On donne le développement limité de U à l'ordre deux :

$$U = MB_0 + (mg + Ma_2)z + a_4Mz^2 + \frac{1}{2}\alpha a_4Mr^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a_2^2}{2a_4B_0} - 1$$

et la figure 9 (pages 13 et 14) fournit les graphes de $B_0(Z)$, $-a_2(Z)$, $a_4(Z)$ et $\alpha(Z)$ en fonction de la cote Z du point O' mesurée en centimètres à partir du centre O de l'aimant torique.

III.D.2) Dédurre des graphes le domaine des valeurs numériques de la cote Z du point O' assurant la stabilité latérale et la stabilité axiale.

III.D.3) La lévitation n'est possible que si mg/M est compris entre deux valeurs. Interpréter graphiquement. On ne cherchera pas à calculer les valeurs extrêmes du rapport mg/M .

III.D.4) En pratique, on lance la rotation de l'aimant (A) sur un support, puis on monte le support jusqu'à la position d'équilibre O' et finalement on retire le support. Justifier que la stabilité radiale est assurée au cours de l'opération.

III.E - L'expérience est très sensible aux variations de température des aimants permanents. Expliquer brièvement pourquoi.

III.F - Pour éviter tout échauffement des aimants, on les réalise dans un matériau isolant. Quels phénomènes seraient à l'origine de l'échauffement si on utilisait des aimants conducteurs ?

Partie IV - Lévitiation dans le champ de pression d'une onde sonore

Il est possible de faire léviter une petite bille solide de masse volumique μ_s dans une zone de l'espace où règne une onde sonore stationnaire suffisamment puissante. Le rayon b de la bille est très inférieur à la longueur d'onde et on néglige la perturbation apportée par la bille à l'onde sonore. On néglige l'influence de la pesanteur sur l'onde sonore, ainsi que la viscosité de l'air. On note $\mu_0 = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de l'air et $p_0 = 1,0 \text{ bar}$ la pression en l'absence d'onde. On note $c = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la célérité des ondes sonores. On admet que l'action de l'onde sonore sur la bille peut être remplacée par sa moyenne temporelle.

IV.A - On place une membrane de haut-parleur à l'extrémité d'un tuyau de section $S = 0,1 \text{ m}^2$ dont l'autre extrémité est fermée en $z = 0$ par un mur fixe (figure 7). L'onde, sinusoïdale de fréquence $f = 20 \text{ kHz}$, est émise par la membrane qui se déplace au voisinage du plan $z = L$ avec une vitesse $u(t) = U \sin(\omega t)$ avec $U = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On cherche dans cette question, dans le domaine $0 \leq z \leq L$, la solution des équations des ondes sonores dans l'approximation acoustique, supposée de la forme $v(z,t) = f(z) \sin \omega t$.

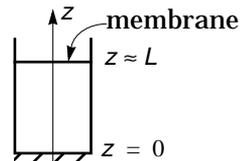


Figure 7

IV.A.1) Quelle est la condition aux limites imposée par la membrane ? Justifier par un calcul d'ordre de grandeur que cette condition peut être écrite en $z = L$.

IV.A.2) Rappeler sans démonstration l'équation d'ondes dont est solution $v(z,t)$. En déduire la forme générale de $f(z)$ et achever sa détermination à l'aide des conditions aux limites.

IV.A.3) Déterminer les points où l'amplitude de la vitesse est maximale et la valeur v_M de cette amplitude maximale en fonction de U , L , ω et c . Déterminer les pulsations ω_n faisant diverger v_M et les interpréter concrètement. Par quoi est en réalité limitée la valeur de v_M lorsque $\omega = \omega_n$?

IV.A.4) Déterminer le champ de pression $p(z,t) = p_0 + p_1(z,t)$. Peut-on interpréter la lévitation d'une bille solide ?

IV.B - Dans toute la suite, on règle L pour avoir $v_M = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et on pose :

$$v(z,t) = v_1(z,t) + v_2(z,t)$$

$$\rho(z,t) = \rho_0 + \rho_1(z,t) + \rho_2(z,t)$$

$$\mu(z,t) = \mu_0 + \mu_1(z,t) + \mu_2(z,t)$$

où les termes d'indice 0 sont les termes constants traduisant la situation en l'absence d'onde sonore ; les termes d'indice 1 sont les solutions des équations linéarisées, qui ont été obtenues à la question IV.A ; les termes d'indice 2 sont les corrections d'ordre 2 par rapport à l'amplitude v_M de v_1 . Tout terme d'ordre supérieur ou égal à 3 en v_M sera négligé dans les calculs.

IV.B.1) Justifier par un calcul d'ordre de grandeur qu'on ne peut plus travailler dans l'approximation acoustique.

IV.B.2) On admet que ρ_2 est solution de l'équation d'ondes :

$$\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \frac{\partial v_1}{\partial z}$$

et on cherche une solution de la forme

$$\rho_2 = (1/4) \mu_0^\alpha v_M^\beta \cos(2\omega z/c) + g(z) \cos(2\omega t).$$

On rappelle la relation :

$$\oint_{(\Sigma)} -\rho d\vec{S} = \iiint_{(V)} -\text{grad} p dt$$

- Justifier sans calcul la présence d'un terme indépendant du temps et d'un terme de pulsation 2ω dans l'expression de ρ_2 .
- Par simple analyse dimensionnelle, trouver α et β . En tenant compte de la petite taille de la bille, en déduire la force moyenne $\langle \vec{F} \rangle$ qu'exerce sur elle l'onde sonore.
- Discuter (par exemple graphiquement) l'existence de positions d'équilibre et leur stabilité.
- Calculer la valeur maximale de la masse volumique μ_s d'une bille susceptible de léviter.

IV.B.3) Extraire de l'équation d'Euler une équation aux dérivées partielles portant exclusivement sur les termes d'ordre deux en v_M (La même démarche, sur l'équation de conservation de la masse et sur l'équation d'évolution thermodynamique, conduirait après élimination à l'équation fournie en IV.B.2).

••• FIN •••

Figure 8-a

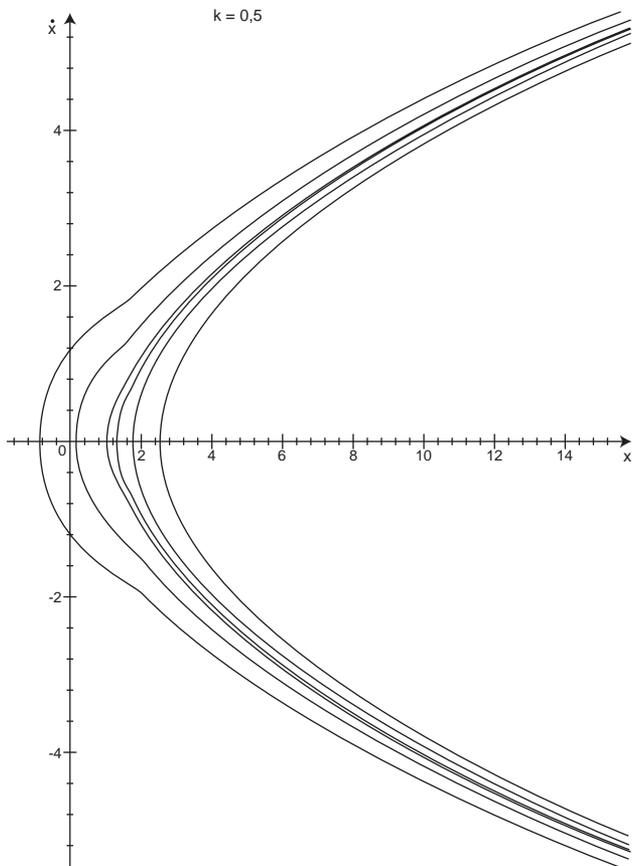


Figure 8-b

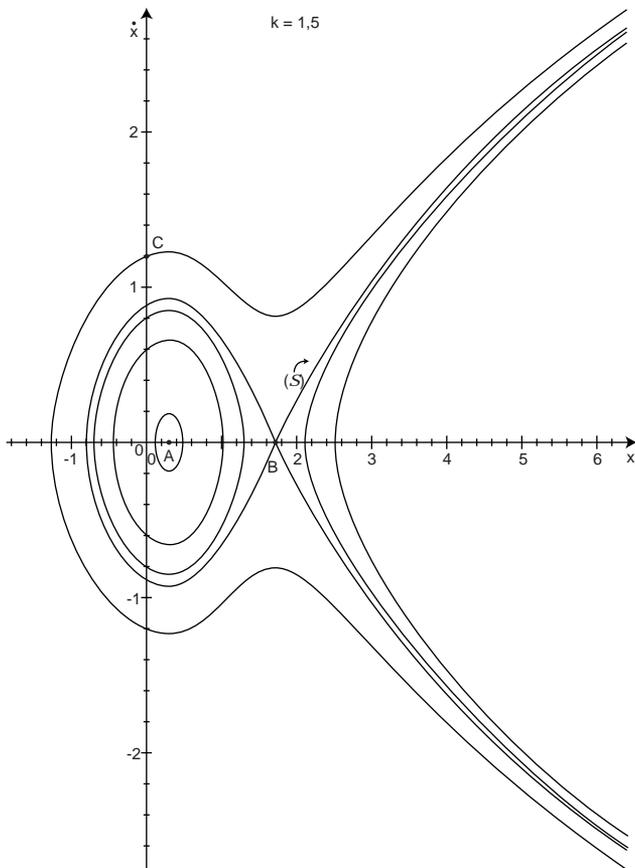


Figure 8-c

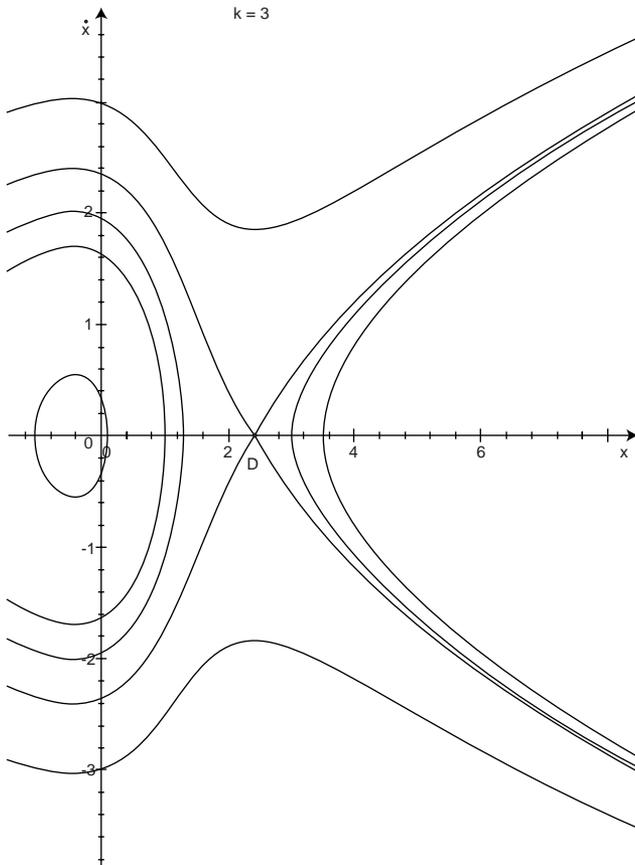


Figure 9-a

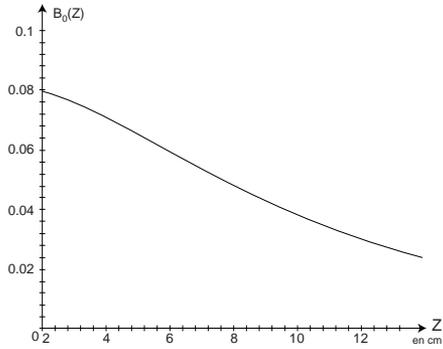


Figure 9-b

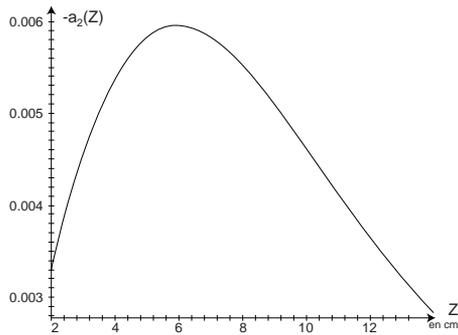


Figure 9-c

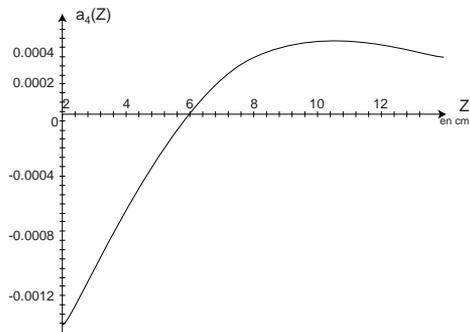


Figure 9-d

