

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

PHYSIQUE 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Les deux problèmes sont indépendants. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

PROBLEME 1 - THERMODYNAMIQUE

Un câble d'acier de longueur L , de masse m et dont la section s , supposée constante, a pour diamètre D , est fixé à un support stable par l'une de ses extrémités. Il est tiré par une force d'intensité F à l'autre extrémité. Pour tout état défini du câble, sa température thermodynamique T est supposée uniforme ; T est égale à sa température t dans l'échelle Celsius plus 273,1.

Pour $t = 0^\circ\text{C}$ et $F = 0 \text{ N}$, on pose $L = L_0$. Dans ces conditions la masse volumique de l'acier vaut μ_0 .

L'équation d'état du câble lie sa longueur L à la température t et à l'intensité de la force F selon la relation

$$L = L_0 \left(1 + \alpha T + \frac{F}{sE} \right)$$

où E et α sont des constantes appelées respectivement module d'Young et coefficient de dilatation linéaire de l'acier.

Les différentes données numériques sont rassemblées à la fin de l'énoncé de ce problème.

On note respectivement par U , H et S l'énergie interne, l'enthalpie et l'entropie du câble.

Quand l'entropie est considérée comme une fonction de T et de L , sa différentielle a pour expression

$dS = m \frac{c_L}{T} dT + \frac{l}{T} dL$ dans laquelle c_L et l sont des coefficients calorimétriques fonctions a priori de T et de L . De même,

quand l'entropie est considérée comme une fonction de T et F sa différentielle a pour expression

$dS = m \frac{c_F}{T} dT + \frac{k}{T} dF$ où c_F et k sont également des coefficients calorimétriques fonctions a priori de T et de F .

1. Energie interne U.

1.1. Exprimer la différentielle dU de l'énergie interne dans les variables dT et dL avec m , c_L , l et F comme paramètres.

1.2. Etablir l'expression de l en fonction de α , E , s et T .

1.3. Montrer que l ne dépend que de T .

2. Enthalpie H.

2.1. Par analogie avec les fluides, définir la fonction H à partir de la fonction U et des paramètres F et L puis exprimer sa différentielle dH dans les variables dT et dF avec m , c_F , k et L comme paramètres.

2.2. Etablir l'expression de k en fonction de α , T et L .

2.3. Montrer que c_F ne dépend que de T .

3. Etablir l'expression de $c_F - c_L$ en fonction de T, E, s, L_0 et α . (et m)

Vérifier qu'à 20°C, $c_F - c_L$ vaut pratiquement $1J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$.

Dans la suite, on supposera que c_F et c_L sont des constantes.

4. On note L_{20} la valeur de L à 20°C pour une force de traction nulle.

Dans le plan F, L (F en ordonnée et L en abscisse), établir l'équation littérale de l'isotherme $t = 20^\circ C$ avec L_{20} , L_0 , E et s comme paramètres et tracer sa courbe représentative (*directement sur la copie*).

Dans ce même plan, établir l'équation littérale de l'isentrope passant par le point de coordonnées $F = 0$ N et $L = L_{20}$ avec les mêmes paramètres plus c_F et c_L et tracer sa courbe représentative sur le même graphique que l'isotherme. On désignera ce graphique par « graphique 1 ».

Aucune valeur numérique n'est demandée pour ces deux tracés. Seules importent la nature des courbes et leurs positions relatives.

5. Dans le plan T, S (T en ordonnée et S en abscisse), établir l'équation littérale de la courbe représentative des états du câble définis par une même valeur de F.

On prendra $S = 0 J \cdot K^{-1}$ pour $F = 0$ N et $t = 0^\circ C$.

Tracer sur un même graphique que l'on nommera « graphique 2 » la courbe pour $F = 0$ N puis la courbe pour une valeur quelconque de F (*là aussi, les tracés sont à effectuer sur la copie*).

Comme précédemment, seules importent l'allure des courbes et leurs positions relatives.

6. Calculer l'allongement du câble $(\Delta L)_T$ pour une force d'intensité $F = 800$ N à température constante.

7. Quelle est, pour une force de traction nulle, l'élévation de température $(\Delta T)_F$ qui donnerait le même allongement qu'à la question précédente ? Calculer dans ces conditions la quantité de chaleur Q_F reçue par le câble.

8. Calculer l'allongement $(\Delta L)_S$ du câble lorsqu'on exerce une force de traction progressive de 0 à 800 N de façon adiabatique et réversible à partir d'une température initiale de 20°C. L'état initial du câble est noté E_1 et l'état final E_2 .

Calculer la variation de température $(\Delta T)_S$ du câble au cours de cette transformation.

9. Représenter $(\Delta L)_T$ et $(\Delta L)_S$ sur le graphique 1. Commenter

10. Représenter les états E_1 et E_2 ainsi que $(\Delta T)_S$ sur le graphique 2.

11. A partir de l'état final E_2 de la question 8, on supprime brutalement la force traction de 800 N.

On note $(\Delta T)_Q$ la nouvelle variation de température du câble avant tout échange de chaleur avec

l'extérieur. L'état du câble est alors noté E_3 .

Sur le graphique 2, représenter sans calcul mais en vous justifiant, la position relative de l'état E_3 par rapport à l'état E_1 et y faire figurer $(\Delta T)_Q$. On ne demande pas de calculer cette valeur.

La température t_3 sera-t-elle supérieure ou inférieure à 20°C ?

Données

$D = 3mm; L_0 = 10m; E = 2 \cdot 10^{11} Pa; \rho = 7,810^3 kg \cdot m^{-3}; c_F = 460 J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}; \alpha = 12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$

PROBLEME 2 - MECANIQUE

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une roue libre de démarreur d'une motocyclette. Elle est constituée d'un cylindre intérieur que nous appellerons "arbre", que nous numérotions 1 et dont l'axe de révolution portera l'axe \vec{Z} , d'un cylindre creux que nous appellerons couronne et numérotions 3 et de petits cylindres pleins appelés rouleaux, en contact avec l'arbre le long d'une génératrice et avec la couronne le long d'un plan incliné par rapport à la direction tangentielle. Un ressort 4 assure le positionnement du rouleau. Le démarreur est relié à la couronne extérieure et n'entraîne en rotation l'arbre fixé au moteur que lorsque le moment à transmettre entre couronne 3 et arbre 1 est positif (ce moment est porté par l'axe \vec{Z}).

Le plan de symétrie orthogonal aux cylindres sera repéré par les axes l'étude se fera entièrement dans ce plan $(0, \vec{X}, \vec{Y})$; l'axe \vec{Z} défini précédemment est tel que le repère $(0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ soit direct.

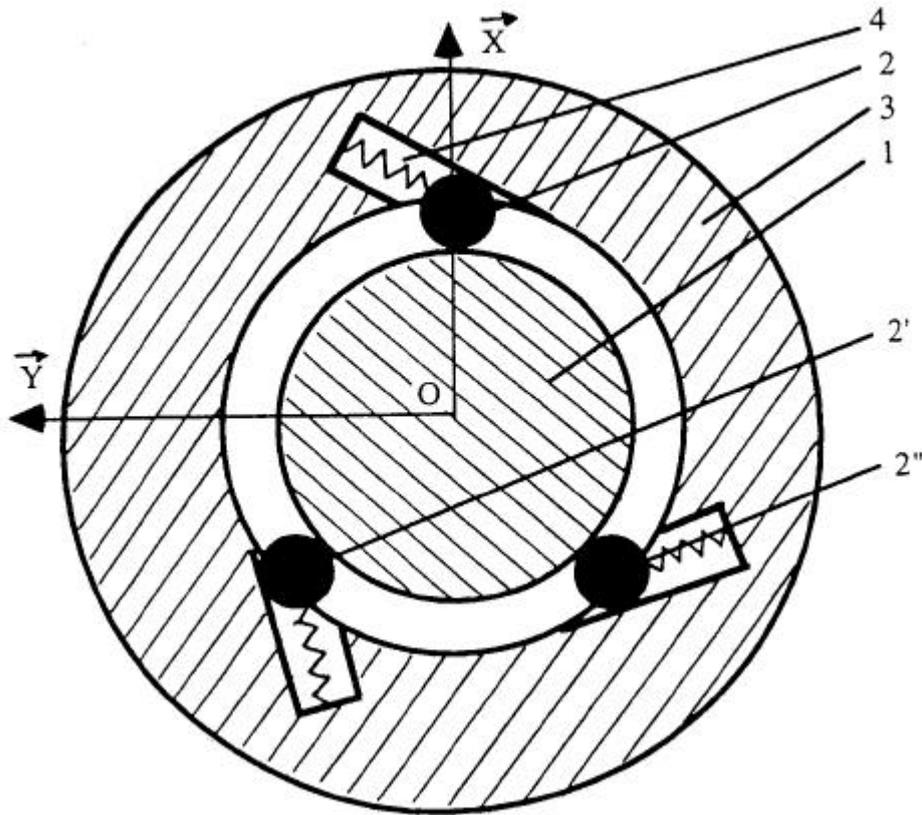


figure 1 : vue d'ensemble, dans le plan de symétrie $(0, \vec{X}, \vec{Y})$ de la roue libre composée de la couronne 3, des trois rouleaux à 120° (2, 2' et 2''), de l'arbre moteur 1 et des ressorts de mise en position (4, 4' et 4'')

Nous négligerons dans tout le problème l'action du ressort 4 par rapport aux efforts des contacts 3-2 et 1-2. Il y a trois rouleaux positionnés à 120° les uns des autres : ils seront repérés par les indices 2, 2' et 2''.

On notera \vec{F}_{ij} l'effort exercé par la pièce i sur la pièce j au point de contact entre ces deux pièces et \vec{C}_{ij} le moment d'un couple exercé par la pièce i sur la pièce j. On notera a le rayon des rouleaux, r le rayon de l'arbre 1, α l'angle d'inclinaison ($\alpha > 0$) du contact 3-2 par rapport à la direction \vec{e}_r (figure 2). $\vec{C}_{d3} = C_{d3} \vec{Z}$ désignera le moment du couple exercé par le démarreur sur la couronne 3 ; C_{d3} est positif. On notera 2' et 2'' les deux autres rouleaux et leurs repères locaux associés $(C', \vec{e}'_r, \vec{e}'_q, \vec{Z})$ et $(C'', \vec{e}''_r, \vec{e}''_q, \vec{Z})$. On supposera que l'arbre 1 est monté flottant : il est positionné radialement par les trois rouleaux. Les modules des efforts de contact de chaque rouleau sur l'arbre sont alors les mêmes dans leur repère local.

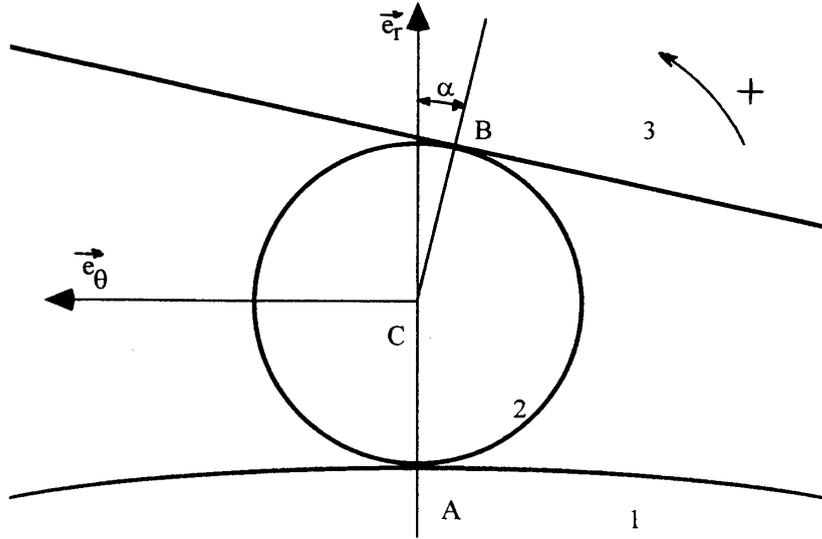


figure 2 : repère local associé au rouleau 2

1. Étude statique sans frottement

Montrez que si les liaisons sont considérées comme des contacts ponctuels sans frottement, le moment de chaque effort $\vec{F}_{21}, \vec{F}_{2'1}, \vec{F}_{2''1}$ par rapport au point 0 est nul. Le moment du couple transmissible à l'arbre 1 par ce système est alors nul.

2. Étude statique avec frottement : coincement

Le résultat précédent montre qu'il est nécessaire de considérer le frottement. Il sera de type Coulomb, d'angle maximal d'inclinaison de l'effort par rapport à la normale au plan tangent : β . Il sera identique aux deux contacts 1-2 et 2-3.

2.1. Dans l'hypothèse de non glissement, quelle est la relation entre les intensités F_{12} et F_{32} des efforts \vec{F}_{12} et \vec{F}_{32} ?

2.2. Quel est l'angle γ de l'effort \vec{F}_{12} par rapport à la direction \vec{e}_r ? On l'exprimera en fonction de α .

2.3. Quelle est la relation que doit vérifier α par rapport à β pour que cette hypothèse de non glissement soit valide ?

2.4. Quelle est l'expression du moment du couple exercé par les trois rouleaux sur l'arbre 1, en fonction de α , F_{12} et r ?

3. Étude dynamique avec frottement

On se placera dans les hypothèses de la partie 2. On négligera la masse des rouleaux.

A l'instant initial ($t = 0$) on supposera les rouleaux en contact avec la couronne et l'arbre 1, l'ensemble étant immobile.

Seules les rotations dans le sens positif seront envisagées.

3.1. Pourquoi le roulement sans glissement des rouleaux ne peut-il apparaître ?

Soit \mathbf{q} l'angle repérant la position angulaire de la couronne depuis l'instant initial, I_3 le moment d'inertie par rapport à l'axe \vec{Z} de la couronne et $C_{d3} \vec{Z}$ le moment du couple exercé par le démarreur sur celle-ci. Soit \mathbf{q} l'angle repérant la position angulaire de l'arbre 1 depuis l'instant initial, I_1 son moment d'inertie par rapport à l'axe i et $C_{m1} i$ le moment du couple exercé par le moteur sur cet axe.

Le couple de moment C_{m1} est considéré constant et résistant jusqu'à ce que l'arbre 1 atteigne la vitesse de rotation Ω_1 : $C_{m1} = -C_{ml}r < 0$. A cet instant que nous repérerons par t_1 le moteur démarre et ce couple devient moteur : $C_{m1} = C_{ml}m > 0$. Pendant toute cette phase le couple de moment C_{d3} est constant. Suite au démarrage, à l'instant t_2 ($t_2 > t_1$) on cesse d'actionner le démarreur : le couple de moment C_{d3} devient nul.

3.2. Tracez en fonction du temps les évolutions des moments C_{m1} et C_{d3} de ces deux couples sur le même graphe (*directement sur la copie*). On veillera à la logique des niveaux relatifs de ceux-ci.

3.3. Quelles sont les équations de mouvement de la couronne 3 et de l'axe 1 pour $t < t_1$?

3.4. On notera la dérivée temporelle $\frac{d\mathbf{q}}{dt} : \dot{\mathbf{q}}_i$. Donnez l'évolution des vitesses de rotation $\dot{\mathbf{q}}_1$ et $\dot{\mathbf{q}}_3$ pour $t < t_1$?

3.5 A partir de l'instant t_1 , vous étudierez les deux cas de figure :

a) la roue libre reste bloquée

b) la roue libre se libère : les vitesses de rotation $\dot{\mathbf{q}}_1$ et $\dot{\mathbf{q}}_3$ ne sont plus liées.

Quelle est la condition sur $I_1, I_3, C_{mlm}, C_{d3}$ qui permet de distinguer ces deux cas ? Donnez les évolutions de $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_1, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_3$ en fonction du temps pour t tel que $t_1 < t < t_2$.

3.6. Donnez les évolutions de $\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_3$ en fonction du temps, pendant la dernière phase : $t > t_2$.

3.7. Tracez les évolutions en fonction du temps de $\dot{\mathbf{q}}_1$ et de $\dot{\mathbf{q}}_3$

3.8. Que pensez-vous du comportement de la couronne pour $t > t_2$? Quelle hypothèse serait à remettre en cause ?

4) Détérioration de la couronne . étude statique

Suite à la fatigue du matériau, une fissure radiale apparaît dans la couronne 3 et traverse celle-ci complètement (voir figure 3).

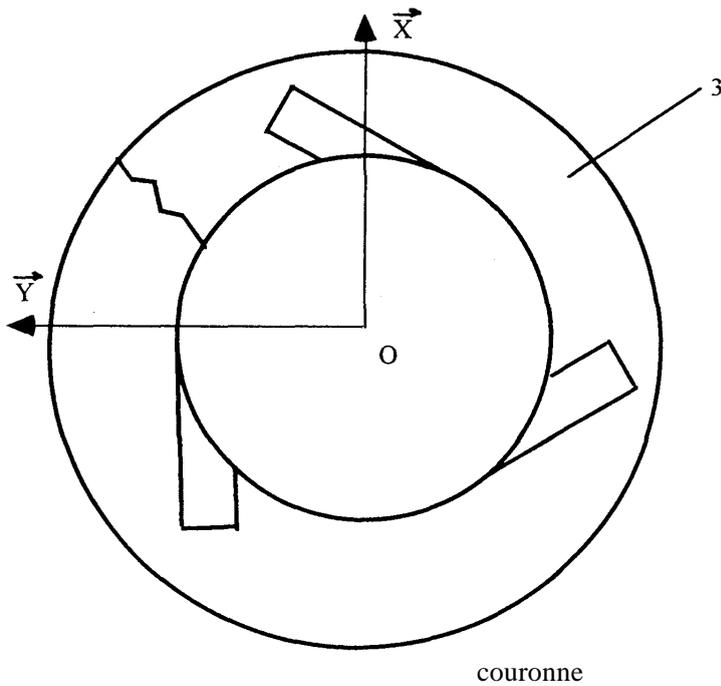


figure 3 . vue de la fissure affectant la

couronne

L'élasticité de la couronne fait que les efforts exercés par les rouleaux ont tendance à ouvrir cette fissure ; soit u la largeur de cette fissure. Nous modéliserons cette pièce élastique par deux solides rigides indéformables que nous noterons $3'$ et $3''$, liés entre eux par une liaison pivot d'axe \vec{Z} au point B'' diamétralement opposée à la fissure et un ressort de rappel de rigidité k (en $N\ m^{-1}$) et de longueur nulle au repos (lorsque $u = 0$), entre les deux lèvres de la fissure. On négligera le rayon a des rouleaux, aussi les points S, B, B' et B'' seront considérés à une distance r du point O . Cette modélisation simplifiée est représentée figure 4. Nous supposons de plus pour simplifier que cette fissure s'est ouverte dans un axe de vecteur directeur \vec{V} faisant un angle de α par rapport au

rouleau de référence numéro 2. Ceci implique que l'effort $\vec{F}_{2'3}$ agit directement sur la liaison pivot $3'-3''$. Le couple de moment $C_{d3}\vec{Z}$ exercé précédemment par le démarreur sur la couronne 3 sera remplacé sur la demi couronne $3'$ par un couple de moment $C_{d3'}\vec{Z}$ et sur la demi couronne $3''$ par un couple de moment $C_{d3''}\vec{Z}$

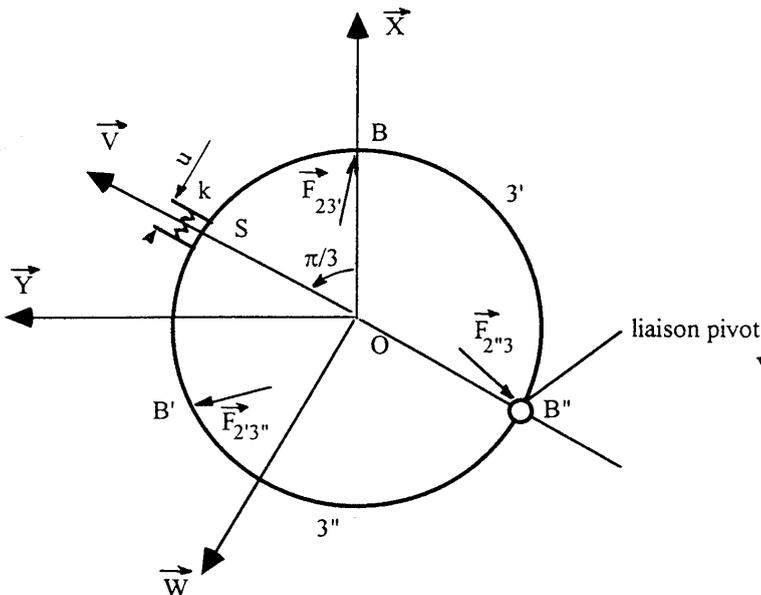


figure 4 : modélisation de la couronne fissurée par deux solides indéformables liés par une liaison pivot et un ressort de rigidité k .

4. 1. On notera \vec{F}_r l'effort exercé par le ressort sur $3'$. Quelle relation lie u à $F_{23'}$? On exprimera u en fonction de $F_{23'}$, r , α , k et C_{d3} . Quelle relation lie u à $F_{2'3''}$?

4.2. Si l'on pose $C_{d3'} = \mathbf{d}C_{d3}$ et $C_{d3''} = (1 - \mathbf{d})C_{d3}$, quelle est la valeur de \mathbf{d} pour que les équations obtenues ci-dessus soient les mêmes ?

4.3. Quel est le déplacement du point d'application de $\vec{F}_{2,3}$ du fait de la largeur u de la fissure considérée petite par rapport à r ? Quelle est la valeur de la composante du déplacement dans la direction \vec{e}_r ?

4.4. L'indépendance par rapport à u du couple transmis par la roue libre reste-t-elle valable quelle que soit l'importance de ce couple ? Pourquoi ?

Fin de l'énoncé