

**version définitive 1.1
de Physique
pour l'épreuve commune
PC-PSI**

Circulation routière : détection, trafic, pneumatique

Ce problème est organisé en trois parties totalement indépendantes. Le candidat prendra soin de ne négliger ni les arguments physiques qualitatifs, ni les applications numériques. Il est impératif de préciser pour chaque réponse le numéro de la question correspondante.

I. DETECTION DE VEHICULE PAR BOUCLE INDUCTIVE

En milieu urbain, la détection des véhicules par boucle inductive s'est fortement développée afin d'améliorer la gestion des feux de signalisation sur certains carrefours stratégiques. On utilise également ces capteurs pour étudier la fréquentation d'une route, cette détection étant parfois capable de discerner différents types de véhicules (poids lourds, voitures, et plus rarement les deux roues).

Le capteur est une boucle conductrice implantée dans la chaussée, formée de spires rectangulaires dont la taille est de l'ordre du mètre. Cette boucle fait partie d'un circuit électronique oscillant dont la fréquence est fonction de son inductance. En présence d'un véhicule, l'environnement électromagnétique de la boucle est perturbé à cause des courants de Foucault induits dans les parties métalliques du véhicule. L'inductance du circuit est alors modifiée et la détection de la variation de fréquence des oscillations permet d'en déduire la présence du véhicule.

Dans cette partie, nous étudierons quelques propriétés relatives à l'induction, puis nous verrons un circuit électronique de principe illustrant cette détection.

I.A. Courants de Foucault, effet de peau

On cherche à décrire les courants de Foucault induits dans une masse métallique en aluminium de perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ égale à celle du vide et de conductivité $\gamma = 4 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$. On donne la permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

- 1) Evaluer simplement l'ordre de grandeur du rapport entre les courants de déplacement et les courants de conduction dans l'aluminium pour la fréquence $f = 50 \text{ kHz}$ utilisée dans le système de détection des véhicules.
- 2) Ecrire les quatre équations de Maxwell dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires et la loi d'Ohm locale du métal. En déduire une équation locale vérifiée par le champ magnétique \vec{B} à l'aide de la relation d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

- 3) Qu'est-ce que l'effet de peau? Par analyse dimensionnelle, déterminer l'ordre de grandeur de l'épaisseur caractéristique de cet effet en fonction de μ_0 , γ , f . Effectuer l'application numérique.
- 4) On souhaite à présent décrire précisément l'effet de peau dans une géométrie particulière. On introduit une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et on suppose que le milieu métallique occupe le demi-espace $z > 0$. A l'extérieur du métal, il règne un champ magnétique uniforme et fonction sinusoïdale du temps, de pulsation $\omega = 2\pi f$, d'amplitude B_0 , colinéaire à \vec{e}_x .

En notation complexe, on cherche à décrire le champ magnétique dans le métal sous la forme :

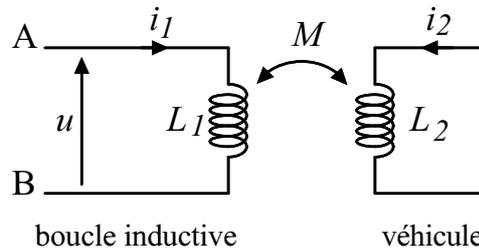
$$\vec{B}(M) = B_0 e^{j(\omega t - \underline{k}z)} \vec{e}_x$$

Déterminer la constante complexe \underline{k} en fonction de $\delta = \sqrt{2/(\mu_0 \omega \gamma)}$.

- 5) Déterminer, en notation réelle, la densité de courant \vec{j} et la densité de charge ρ .
- 6) Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule par unité de surface du conducteur en fonction de $B_0, \gamma, \omega, \mu_0$.

I.B. Coefficients d'inductance

Le capteur est un dipôle AB formé d'une boucle de courant d'intensité variable $i_1(t)$ et d'inductance propre L_1 . Lorsqu'un véhicule se trouve à proximité de la boucle, des courants de Foucault sont induits dans la masse métallique. On modélise ce phénomène par un deuxième circuit d'inductance propre L_2 , parcouru par un courant d'intensité $i_2(t)$. On note M le coefficient d'inductance mutuelle et on négligera la résistance des circuits.



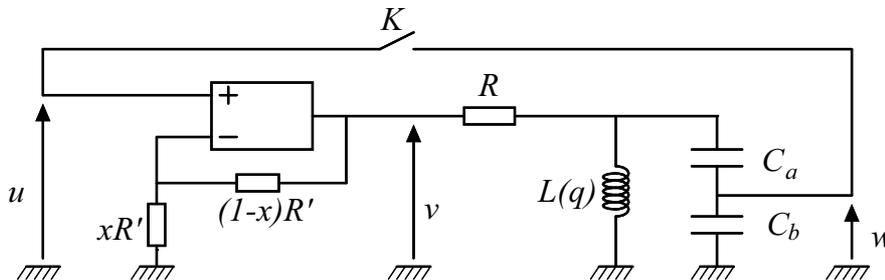
- 7) Montrer qu'en présence du circuit (2), le dipôle AB est équivalent à une inductance propre $L(q)$ de la forme :

$$L(q) = L_1(1 - q)$$

On exprimera q en fonction du coefficient de couplage $M/\sqrt{L_1 L_2}$.

I.C. Oscillateur électrique

On considère le montage suivant utilisant un potentiomètre de résistance totale R' et de coefficient $0 \leq x \leq 1$, une résistance R , la boucle détectrice d'inductance $L(q)$, deux condensateurs de capacité C_a, C_b , et un amplificateur opérationnel considéré comme idéal fonctionnant en régime linéaire.



- 8) Lorsque l'interrupteur K est ouvert, calculer en régime sinusoïdal de pulsation ω la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{W}/\underline{U}$. On l'écrira sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega}\right)}$$

On exprimera les constantes H_0, Q, Ω en fonction de $x, R, C_a, C_b, L(q)$.

9) En déduire l'équation différentielle reliant $u(t)$ et $w(t)$ sous la forme :

$$\frac{d^2w}{dt^2} + a\frac{dw}{dt} + bw = c\frac{du}{dt}$$

On exprimera les coefficients a , b , c en fonction de Ω , H_0 , Q .

10) On ferme l'interrupteur K afin de boucler le système. Montrer que le circuit peut être le siège d'une tension w sinusoïdale pour une valeur particulière x_0 de x que l'on exprimera en fonction de C_a , C_b . Le coefficient q de l'expression $L(q) = L_1(1 - q)$ étant en pratique très inférieur à l'unité, montrer que la pulsation des oscillations est au premier ordre par rapport à q de la forme :

$$\omega(q) = \omega_0\left(1 + \frac{q}{2}\right)$$

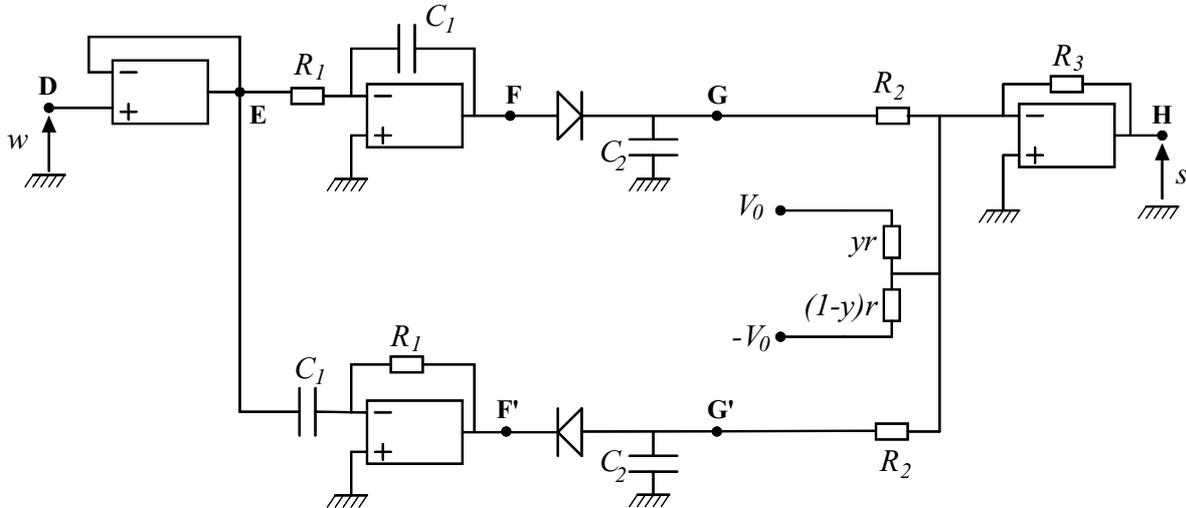
On exprimera ω_0 en fonction de L_1 , C_a , C_b .

11) En pratique, il est impossible de réaliser exactement la condition $x = x_0$. Observe-t-on l'apparition des oscillations pour x légèrement supérieur ou légèrement inférieur à x_0 ?

12) Quel phénomène détermine l'amplitude des oscillations ?

I.D. Détection électronique de la variation de fréquence

L'oscillateur précédent génère la tension w d'amplitude E_0 et de pulsation $\omega(q)$ qu'on applique entre la masse et le point D du montage suivant :



Les quatre amplificateurs opérationnels fonctionnent en régime linéaire et sont considérés comme idéaux. Le montage utilise également un ensemble de condensateurs de capacités C_1 , C_2 , un ensemble de résistances notées R_1 , R_2 , R_3 , un potentiomètre de résistance totale r et de coefficient $0 \leq y \leq 1$. Une alimentation continue symétrique délivre les potentiels $\pm V_0$. Les deux diodes, disposées en sens inverses, sont supposées idéales dans un premier temps.

- 13) Quelle est l'utilité du montage à amplificateur opérationnel placé entre les points D et E ?
- 14) On pose $\omega_1 = 1/(R_1C_1)$. Exprimer l'amplitude E_F du potentiel sinusoïdal V_F en fonction de ω_1 , $\omega(q)$, E_0 .
- 15) Exprimer de même l'amplitude $E_{F'}$ du potentiel sinusoïdal $V_{F'}$.
- 16) Quelle condition doit remplir le produit R_2C_2 pour qu'on puisse obtenir le potentiel constant $V_G = E_F$? On supposera cette condition satisfaite par la suite.
- 17) Déterminer le potentiel $V_{G'}$.
- 18) Déterminer la tension de sortie $s = V_H$ en fonction de E_0 , ω_1 , $\omega(q) = \omega_0(1 + \frac{q}{2})$, R_2 , R_3 , r , y , V_0 . Simplifier cette expression au premier ordre par rapport à q .

19) On ajuste le coefficient y du potentiomètre de compensation afin d'obtenir une tension de sortie nulle en absence de véhicule. En déduire l'expression de s en présence d'un véhicule en fonction de $E_0, \omega_1, \omega_0, R_2, R_3, q$.

20) Comment sont modifiées les tensions $V_G, V_{G'}$, et s si l'on considère que les diodes présentent une tension de seuil U_S ?

II. MODELES CONTINUS DU TRAFIC AUTOMOBILE

Nous allons étudier ici quelques modèles du trafic automobile le long d'une route rectiligne (x') ne comportant qu'une seule voie de circulation.

Par analogie avec l'hydrodynamique, nous décrirons le trafic routier comme un milieu continu à l'aide des champs eulériens suivants :

- $n(x,t)$: densité locale du trafic en x et à l'instant t , en nombre de véhicules par unité de distance ;
- $v(x,t)$: vitesse locale du trafic ; on supposera que les véhicules se déplacent vers les valeurs croissantes de x ;
- $j(x,t) = n(x,t)v(x,t)$: débit local du trafic en nombre de véhicules par unité de temps.

II.A. Equation de conservation

21) A l'aide d'un bilan, montrer que la conservation des véhicules implique la relation :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

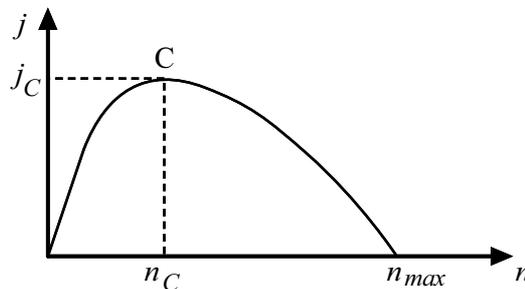
II.B. Diagramme fondamental d'un trafic en équilibre

Le trafic est en équilibre lorsque les champs de densité et de vitesse sont uniformes et stationnaires. Il existe alors des relations entre vitesse, débit et densité que nous noterons sous la forme :

$$v = f(n) \quad , \quad j = g(n) \quad \text{avec} \quad g(n) = nf(n)$$

On appellera diagramme fondamental le graphe de la relation $j = g(n)$. Chaque route possède son propre diagramme fondamental qui dépend des conditions locales du trafic (vitesse maximale autorisée, conditions de visibilité, ...).

Des mesures effectuées sur des routes réelles donnent en général des diagrammes fondamentaux concaves ayant l'allure suivante :



Le débit est maximal en C . Le trafic est qualifié de fluide pour $n < n_C$ et de saturé pour $n > n_C$.

22) Interpréter l'allure de la courbe $j = g(n)$ pour $n \ll n_C$ et donner une signification de la valeur de la pente.

23) Interpréter l'existence de la densité maximale n_{max} et proposer un ordre de grandeur.

II.C. Un modèle de comportement

On étudie ici un modèle particulier du comportement des conducteurs afin d'établir un diagramme fondamental. On introduit la vitesse maximale autorisée v_{\max} de la route considérée, la distance L entre le pare-choc arrière d'une voiture et le pare-choc avant de la voiture suiveuse, et une constante τ ayant la dimension d'un temps permettant d'évaluer l'intervalle de sécurité entre deux voitures consécutives.

Les hypothèses du modèle sont :

- Tous les véhicules ont la même longueur ℓ_0 .
- Les véhicules adoptent la vitesse maximale autorisée v_{\max} tant que $L \geq \tau v_{\max}$.
- Pour $L \leq \tau v_{\max}$, les conducteurs adoptent une vitesse v telle que $L = \tau v$.

24) Donner les expressions de v en fonction de la densité n et des constantes v_{\max} , τ , ℓ_0 pour les deux types de régime.

25) Tracer les graphes $v = f(n)$ et $j = g(n)$.

26) Applications numériques. Calculer les constantes τ et ℓ_0 de ce modèle reproduisant les caractéristiques réelles d'une voie d'autoroute: $v_{\max} = 130 \text{ km.h}^{-1}$, $j_C \approx 1600 \text{ véhicules.h}^{-1}$, $n_{\max} \approx 130 \text{ véhicules.km}^{-1}$. Commenter les valeurs obtenues.

Dans toute la suite de cette partie II, on raisonnera sur le diagramme fondamental général représenté au paragraphe II.B.

II.D. Equation d'onde linéarisée

On considère à présent que le trafic est hors d'équilibre et on admet dans un premier temps que les conducteurs adaptent instantanément leur vitesse en fonction de la densité locale :

$$v(x,t) = f(n(x,t)) \quad j(x,t) = g(n(x,t))$$

On suppose dans cette partie que la densité du trafic est faiblement non uniforme, de densité moyenne n_0 . On pose :

$$n(x,t) = n_0 + \varepsilon(x,t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x,t) \ll n_0$$

On traitera la perturbation $\varepsilon(x,t)$ et ses dérivées partielles comme des infiniment petits du premier ordre.

27) A l'aide de l'équation de conservation, montrer que $\varepsilon(x,t)$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + g'(n_0) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$

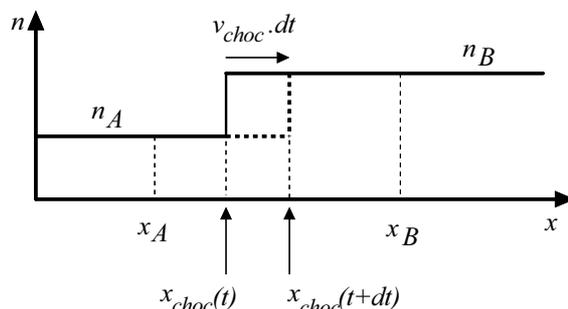
où g' désigne la dérivée de la fonction g .

28) Qu'est-ce qu'une onde progressive? Montrer que l'équation précédente admet des solutions sous la forme d'ondes progressives dont on exprimera la célérité c_0 . L'équation d'onde vérifiée par $\varepsilon(x,t)$ est-elle dispersive?

29) Donner une interprétation graphique de c_0 sur le diagramme fondamental, puis tracer l'allure de c_0 en fonction de n_0 . Discuter le sens de déplacement d'une perturbation de densité ε en fonction de la valeur de n_0 . Comparer c_0 avec la vitesse moyenne $v_0 = f(n_0)$ des véhicules.

II.E. Onde de choc - Embouteillage

On suppose que l'état du trafic présente une onde de choc, c'est à dire une discontinuité de densité en $x_{\text{choc}}(t)$. Pour $x < x_{\text{choc}}(t)$, la densité est uniforme et vaut n_A ; pour $x > x_{\text{choc}}(t)$, la densité est uniforme et vaut n_B .

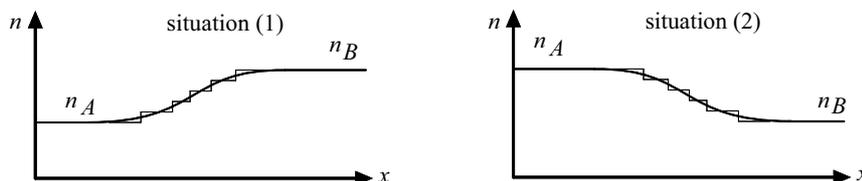


30) Considérer une région fixe s'étendant de $x_A < x_{choc}(t)$ à $x_B > x_{choc}(t)$. En effectuant un bilan du nombre de véhicules entre t et $t + dt$, déterminer la vitesse $v_{choc} = dx_{choc}/dt$ en fonction de n_A , n_B , $j_A = g(n_A)$, $j_B = g(n_B)$.

31) Donner une interprétation graphique de v_{choc} sur le diagramme fondamental. Cette construction est-elle cohérente avec le résultat de la question **29** ?

32) Afin de comprendre la formation d'une onde de choc entre deux régions de densités différentes, on modélise les variations de n en fonction de x à l'aide d'un profil en escalier comme le suggère la figure suivante. On envisage les deux situations :

- situation (1) : augmentation de la densité dans le sens de la circulation (formation d'un embouteillage) ;
- situation (2) : diminution de la densité dans le sens de la circulation (disparition d'un embouteillage).



Sachant que le diagramme fondamental est concave, comparer les vitesses des fronts successifs de la modélisation en escalier. En déduire dans quelle situation le profil $n(x,t)$ évolue en se raidissant vers celui d'une onde de choc.

33) Par analogie avec l'hydrodynamique, donner l'expression de l'accélération particulière d'un véhicule en fonction du champ eulérien des vitesses $v(x,t)$. Quel terme correspond-il à l'accélération convective ?

34) On considère un embouteillage localisé dans une région finie d'une route et installé depuis assez longtemps pour qu'une onde de choc se soit formée. A l'aide des résultats précédents, représenter l'allure des champs n et v en fonction de x à un instant t donné. Comparer l'accélération convective d'un véhicule qui rentre dans l'embouteillage avec celle d'un véhicule qui sort de l'embouteillage. Ces résultats sont-ils conformes aux observations courantes ?

II.F. Etude de la stabilité

Le modèle que nous avons jusque-là étudié ne permet pas de comprendre l'apparition spontanée d'embouteillages et d'une circulation en accordéon quand la densité moyenne du trafic est trop importante. Ces phénomènes traduisent une possible instabilité d'un trafic en équilibre.

Pour un trafic faiblement hors d'équilibre de densité moyenne n_0 , nous considérerons désormais que la vitesse en (x,t) est donnée par la relation :

$$v(x,t) = f\left(n\left(x + \frac{1}{n_0}, t - \Delta t\right)\right)$$

où Δt est une constante positive et $f(n)$ la fonction décrivant la vitesse d'un trafic en équilibre définie à la question **II.B**.

35) Interpréter qualitativement cette relation et donner la signification de Δt .

36) On écrit la densité sous la forme :

$$n(x,t) = n_0 + \varepsilon(x,t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x,t) \ll n_0$$

On suppose que les variations de $\varepsilon(x,t)$ sont faibles pour des variations respectives de x et de t de l'ordre de $1/n_0$ et de Δt . En traitant la perturbation $\varepsilon(x,t)$ et ses dérivées partielles comme des infiniment petits du premier ordre, exprimer $v(x,t)$ en fonction de n_0 , $f(n_0)$, $f'(n_0)$, Δt , $\varepsilon(x,t)$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(x,t)$.

37) On introduit $v_0 = f(n_0)$ la vitesse moyenne des véhicules. A partir de l'équation de conservation, on peut établir la nouvelle équation d'onde linéarisée que l'on admettra :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + g'(n_0) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + (g'(n_0) - v_0) \left(\frac{1}{n_0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} - \Delta t \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} \right) = 0$$

A l'aide de la notation complexe, on recherche des solutions de la forme :

$$\varepsilon(x,t) = \text{Re}(\varepsilon_0 e^{\sigma t} e^{j(\omega t - kx)})$$

où σ , ω , k sont des constantes réelles, ε_0 une constante complexe. Dans le cas où l'équation d'onde admet des solutions divergentes, l'état d'équilibre de densité uniforme n_0 est instable et évolue vers un profil $n(x,t)$ non uniforme.

Exprimer σ en fonction de v_0 , $g'(n_0)$, Δt , k .

38) A quelle condition portant sur $g'(n_0)$ le trafic est-il instable? Vérifier que le trafic est alors nécessairement saturé.

III. VISCO-ELASTICITE. APPLICATION AUX PNEUMATIQUES DE VOITURES

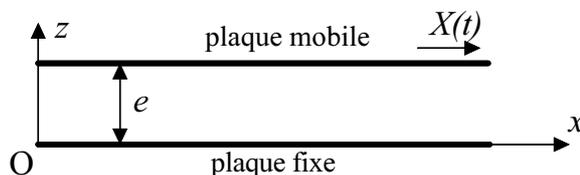
On introduit une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le champ de pesanteur est noté $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

On place un fluide incompressible de masse volumique μ entre deux plaques horizontales, infinies et parallèles. La plaque en $z = 0$ est fixe. La plaque de cote $z = e$ peut se déplacer horizontalement d'une quantité $X(t)\vec{e}_x$. On définit la déformation globale de cisaillement $\gamma(t)$ par l'expression :

$$\gamma(t) = \frac{X(t)}{e}$$

L'écoulement induit est parallèle, selon \vec{e}_x . Le champ de pression $P(z,t)$ est indépendant de x et de y , ainsi que le champ de vitesse noté $v(z,t)\vec{e}_x$.

La contrainte tangentielle $\sigma(z,t)$ est la composante suivant x de la force par unité de surface exercée par le fluide situé au dessus de la cote z sur le fluide situé en dessous de la cote z .



III.A. Cas d'un fluide newtonien

39) On suppose que le fluide est newtonien, de viscosité dynamique η . Rappeler la relation reliant la contrainte tangentielle $\sigma(z,t)$ et le champ de vitesse $v(z,t)$.

40) En projetant sur \vec{e}_x le théorème de la résultante dynamique appliqué à une tranche de fluide comprise entre z et $z + dz$, établir l'équation locale vérifiée par le champ de vitesse $v(z,t)$.

41) On suppose que la plaque mobile effectue un mouvement sinusoïdal de pulsation ω . L'abscisse de la plaque est notée $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$. On introduit les variables adimensionnées caractéristiques $t' = \omega t$ et $z' = z/e$. Montrer que l'équation établie à la question précédente se met sous la forme :

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial t'} = \frac{\partial^2 v}{\partial z'^2}$$

où α est un coefficient sans dimension.

42) Si e est très inférieur à une limite que l'on déterminera, alors $\alpha \ll 1$. Sous cette condition que l'on adoptera par la suite, on peut traiter l'équation précédente dans une approximation de régime quasi-stationnaire et écrire :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z'^2} \approx 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \approx 0$$

En déduire que la contrainte σ est indépendante de z et donner la relation entre $\sigma(t)$ et $\gamma(t)$.

43) Exprimer la puissance mécanique moyenne reçue par unité de volume de fluide en fonction η , ω , et de l'amplitude γ_0 de la déformation de cisaillement $\gamma(t)$. Sous quelle forme cette puissance est-elle convertie ?

III.B. Cas d'un milieu élastique

On remplace le milieu fluide précédent par un milieu incompressible parfaitement élastique entre les deux plaques.

Quand la plaque supérieure se déplace d'une quantité $X(t)\vec{e}_x$, chaque élément de volume du milieu de cote z se déplace horizontalement d'une quantité $u(z,t)\vec{e}_x$. Le milieu étant solidaire des deux plaques au niveau des surfaces de contact, on a les conditions limites :

$$u(0,t) = 0 \quad u(e,t) = X(t)$$

Lorsque le champ de déformation $u(z,t)$ n'est pas uniforme, le milieu exerce la contrainte tangentielle :

$$\sigma(z,t) = E \frac{\partial u}{\partial z}$$

où E désigne le module d'élasticité du milieu.

44) En projetant sur \vec{e}_x le théorème de la résultante dynamique appliqué à une tranche du milieu élastique comprise entre z et $z + dz$, établir l'équation locale vérifiée par le champ de déplacement $u(z,t)$.

45) La plaque mobile effectue un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et on introduit les variables adimensionnées $t' = \omega t$ et $z' = z/e$. Montrer que l'équation établie à la question précédente se met sous la forme :

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}$$

où β est un coefficient sans dimension.

46) Si e est très inférieur à une limite que l'on déterminera, alors $\beta \ll 1$ et on peut traiter l'équation précédente dans une approximation de régime quasi-stationnaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} \approx 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx 0$$

En déduire que la contrainte σ est indépendante de z et donner la relation entre $\sigma(t)$ et $\gamma(t)$.

III.C. Cas général d'un milieu linéaire

On place entre les plaques un milieu incompressible linéaire quelconque. Dans les conditions expérimentales envisagées, nous supposons que l'écartement e est assez mince pour pouvoir considérer comme précédemment que le champ de contrainte σ est indépendant de z .

Il existe alors une relation différentielle linéaire entre $\sigma(t)$ et la déformation de cisaillement $\gamma(t)$. Lorsqu'on applique sur la plaque supérieure un mouvement sinusoïdal, $\sigma(t)$ et $\gamma(t)$ sont sinusoïdales et de même pulsation ω .

En introduisant la déformation complexe $\underline{\gamma}(t) = \gamma_0 e^{j\omega t}$ et la contrainte complexe $\underline{\sigma}(t) = \sigma_0 e^{j(\omega t + \delta)}$, on définit le module complexe $\underline{G}(\omega)$ de la manière suivante :

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{G}(\omega) \underline{\gamma}(t) \quad \text{avec} \quad \underline{G}(\omega) = G'(\omega) + jG''(\omega)$$

Le déphasage $\delta = \arg \underline{G}$ est l'angle de perte.

47) Montrer que le milieu reçoit la puissance mécanique moyenne par unité de volume :

$$\langle P_{\text{vol}} \rangle = \frac{1}{2} \sigma_0 \gamma_0 \omega \sin \delta$$

48) On considère un milieu visco-élastique dont le module complexe est donné par le modèle de Maxwell :

$$\underline{G}(\omega) = \frac{j\omega\eta}{1 + j\omega\tau}$$

où τ et η sont des constantes positives.

Représenter l'allure de $\log G'$ et de $\log G''$ en fonction de $\log \omega$ en s'appuyant sur un tracé asymptotique. Dans quel domaine de fréquence le comportement du milieu est-il plutôt élastique ? plutôt visqueux ?

49) Certaines pâtes à base de silicone vérifient approximativement le comportement du modèle de Maxwell. Lorsqu'on forme une balle avec une telle pâte et qu'on la laisse tomber sur une table, on constate qu'elle rebondit et se déforme très peu (figure a). Si on pose la balle sur la table, on constate qu'elle se déforme lentement pour former une petite flaque au bout de quelques heures (figure b). Interpréter qualitativement ces observations.

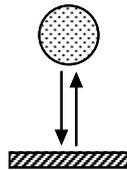


Fig. (a) : rebond



Fig. (b) : étalement

III.D. Propriétés visco-élastiques d'une gomme de pneumatique

Les propriétés visco-élastiques des gommages des pneus de voiture sont particulièrement étudiées par les industriels. En effet, la résistance au roulement représente 20% de la force totale s'opposant à l'avancement du véhicule.

La gomme d'un pneu est un élastomère dont on peut approximativement décrire le comportement visco-élastique à l'aide du modèle de Zener :

$$\underline{G}(\omega) = E_v + \frac{E_c - E_v}{1 + j\omega\tau}$$

Module d'élasticité de l'état vitreux : $E_v \approx 1 \text{ GPa}$

Module d'élasticité de l'état caoutchouteux : $E_c \approx 1 \text{ MPa}$

Dans les conditions de température d'un pneu de voiture, $\tau \approx 5 \text{ ns}$

50) Déterminer la fréquence f_0 pour laquelle l'angle de perte δ est maximal. Calculer en degrés la valeur numérique de δ_{max} .

- 51)** Lorsqu'un véhicule roule à vitesse constante, la gomme est sollicitée avec une fréquence f_1 égale à la fréquence de rotation de la roue. Calculer f_1 pour un pneu de diamètre $R = 30$ cm roulant à 100 km/h. Calculer en degrés la valeur numérique de l'angle de perte δ_1 correspondant.
- 52)** Lorsqu'un véhicule freine en urgence, les pneus glissent sur la route. La fréquence de sollicitation f_2 de la gomme est alors contrôlée par la rugosité de la chaussée qui présente des aspérités dont les tailles varient du μm au mm. Dans le cas d'une vitesse de glissement de 50 km/h, calculer le domaine des fréquences de sollicitation.
- 53)** Expliquer pourquoi la fréquence caractéristique f_0 de la gomme est particulièrement adaptée vis-à-vis de la dissipation énergétique d'un pneumatique.