**ANNEE 2003**

# CONCOURS D'ADMISSION
# A
# L'ECOLE DE L'AIR

## CONCOURS PC/PSI

## COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

***Nota : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.***

T.S.V.P.

# Des problèmes d'eau.

L'épreuve qui suit est constituée de trois parties indépendantes. Elles ont toutes les trois en commun de traiter de questions en rapport avec l'eau : circulation dans un tuyau, oscillation dans un tube en U et propagation d'ondes de surface. Dans toute l'épreuve, on attend du candidat qu'il soit attentif à l'aspect physique des choses, qu'il prenne soin de rédiger correctement ses réponses, de les argumenter de manière concise en soignant la présentation et l'expression. Un nombre important de points sont attribués sur la qualité de rédaction et de présentation de la copie. On attend des applications numériques dès qu'elles sont possibles et des commentaires lorsque c'est approprié.

# Partie I - Circulation de l'eau dans une conduite.

On considère un tuyau cylindrique, de rayon R, de longueur L, horizontal et parcouru par un fluide de viscosité $\eta$. La pression sur l'axe du cylindre est $P_1$ à l'entrée et $P_2$ à la sortie. On rappelle que $\eta$ intervient dans la force surfacique qu'exerce une partie d'un fluide sur une autre de vitesse différente. Si l'écoulement se fait suivant un axe x et la vitesse dépend de y (voir figure 1), cette force surfacique exercée par la partie de y le plus grand sur celle de y le plus petit est :

$$\vec{f}_s = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_x$$

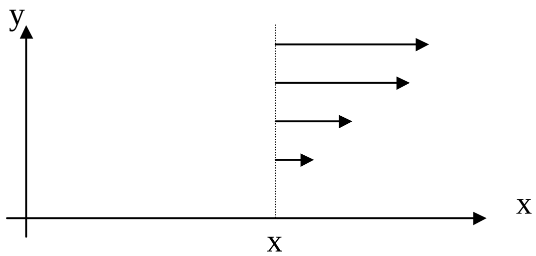



**Figure 1**

Les flèches symbolisent les vitesses à x donné pour différentes valeurs de y.

## 1) Nombre de Reynolds.

Pour savoir si l'écoulement est turbulent ou laminaire, on considère un nombre sans dimension d'autant plus grand que l'écoulement est plus turbulent : ce nombre est le nombre de Reynolds que l'on notera $R_e$. Il utilise les grandeurs physiques $\eta$, $\mu$, la masse volumique du fluide, v, la vitesse caractéristique de l'écoulement et $\ell$, une longueur, elle aussi caractéristique de l'écoulement.

**a)** Dans le problème qui nous occupe, prend-on pour $\ell$ le rayon R ou la longueur L? Expliquer pourquoi.

**b)** En faisant une analyse dimensionnelle de $\ell^{\alpha} v^{\beta} \eta^{\gamma} \mu^{\delta}$, avec $\delta = \pm 1$, déterminer les valeurs possibles des coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour former un nombre sans dimension. Choisir alors leur signe par un argument physique pour former le nombre de Reynolds.

## 2) Débit dans un tuyau.

On va considérer les coordonnées cylindriques axées sur le tuyau (voir figure 2). Un point M est repéré soit par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z), soit par ses cordonnées cylindriques $(r,\theta,x)$. Le point m est le projeté de M sur le plan Oyz, H est le projeté de M sur Ox, r et $\theta$ sont les coordonnées polaires de m dans ce plan où Oy est l'axe polaire. L'axe Ox est l'axe du tuyau et le point O est à son entrée (la pression y est donc $P_1$).

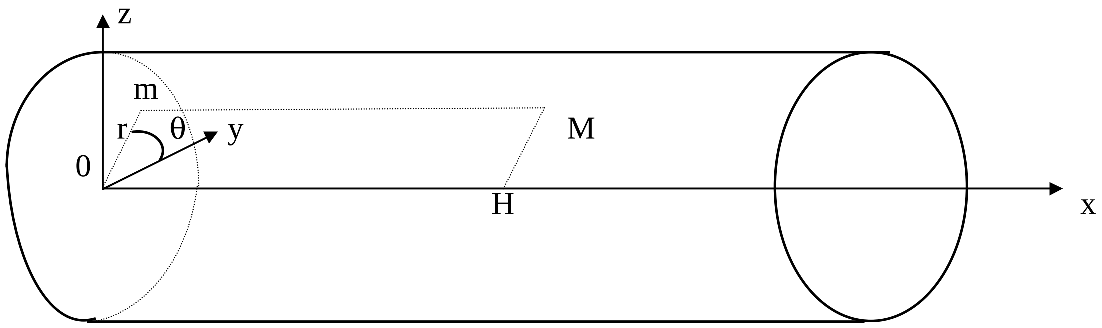



**Figure 2**.

On va considérer un écoulement laminaire permanent suivant l'axe du tuyau. La pesanteur sera négligée. On supposera que la vitesse est de la forme : $\vec{v}(M) = v(r)\vec{e}_x$.

**a)** Indiquer qualitativement comment la pesanteur intervient dans ce problème et pourquoi on la néglige.

**b)** Faire un bilan de force sur un volume élémentaire cylindrique de fluide autour de M de coordonnées (r,θ,x). Montrer que, dans ces conditions, la pression ne dépend pas de θ.

**c)** Déduire du bilan précédent les variations de P suivant r et suivant x.

**d)** Montrer que la pression ne dépend pas de r.

**e)** Montrer que dP/dx est indépendant de x. En déduire sa valeur en fonction de $P_1$, $P_2$ et L. puis la valeur de dv/dr.

**f)** Déterminer v(r) et en déduire la vitesse moyenne $v_m$ et le débit volumique $D_V$ dans le cylindre.

**g)** Rappeler la signification physique d'une impédance (ou d'une résistance). Définir alors K, la résistance hydraulique du tuyau, en dégageant la signification physique des deux paramètres physiques que l'on utilise (on illustrera la définition générale). En déduire son expression en fonction des caractéristiques du tuyau et du liquide.

**h)** On considère l'eau se trouvant à l'instant t dans le tuyau élémentaire horizontal de longueur L et d'épaisseur dr. Déterminer le travail élémentaire des forces de pression qui s'exercent sur ce système entre t et t + dt. En déduire $P_P$, la puissance des forces pressantes qui s'exercent sur le liquide contenu dans l'ensemble du tuyau et $P_V$, la puissance dissipée par viscosité.

Ecrire $P_V$ en fonction de K et du débit volumique $D_V$.

## 3) Application : distribution d'eau.

On va appliquer les relations précédentes à plusieurs cas physiques. On donne g = 10 $m.s^{-2}$, l'accélération de pesanteur, $\eta_{eau} = 10^{-3}$ Pl et $\mu_{eau} = 1000$ kg/$m^3$. Dans cette application, on considère un réseau de distribution d'eau domestique. Ce type de circuit est alimenté par des châteaux d'eau qui assurent la mise en pression du réseau.

**a)** Quel est l'ordre de grandeur de la pression qui peut être attendue dans une canalisation au pied d'un château d'eau de 25 m de haut. On supposera que le débit d'eau dans la canalisation est suffisamment faible pour ne pas perturber le champ de pression dans le château d'eau.

**b)** Soit une conduite d'eau de 100 m de longueur et de section 1 $cm^2$ partant du pied de ce château d'eau. L'autre extrémité de la canalisation est à l'air libre. Quel débit peut-on attendre en sortie en supposant que la relation précédemment établie s'applique bien? Quelle est la vitesse maximale atteinte dans la canalisation?

**c)** Quelle est la puissance dissipée par viscosité ? Sachant que pour l'eau, la capacité thermique vaut $c_{eau} = 4{,}18\ J.K^{-1}.g^{-1}$, estimer l'élévation de température produite si l'eau récupère toute l'énergie dissipée. Conclure.

**d)** Que vaut le nombre de Reynolds pour cette écoulement? Conclure.

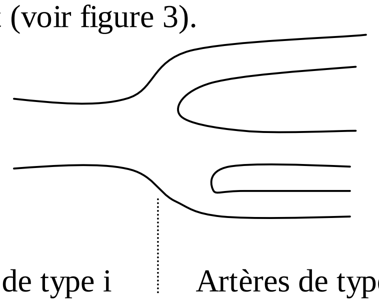
**e)** Dans une maison, on souhaite obtenir des débits assez important, par exemple pour remplir une baignoire. Cependant, dans certaines installations anciennes, on n'obtient pas forcément satisfaction. On dit parfois qu'on « manque de pression » Qu'est-il préférable de faire d'un point de vue technique pour assurer une alimentation plus rapide? Sur quel paramètre physique vaut-il mieux jouer. Qu'est-ce qui peut altérer à la longue la qualité des canalisations en terme de débit?

## 4) Circulation sanguine.

Le corps des animaux est pourvu de quantités de « tuyaux ». On va se pencher ici sur le cas des artères. Elles seront supposées posséder les qualités des tuyaux précédents et les résultats généraux établis plus hauts seront appliqués.

**a)** Quelle qualité importante des artères est omise ici?

**b)** Le réseau de distribution du sang se compose d'artères de tailles très différentes, de l'aorte à de minuscules vaisseaux. On va donner ici des données moyennes. Le cœur qui alimente ce circuit impose un débit $D_0$ = 5 L/min. On utilise ici un modèle simpliste : Les différents types d'artères se suivent et on passe par division d'un diamètre au suivant (voir figure 3).



Artère de type i | Artères de type i+1

**Figure 3.**

Données non exhaustives : $\eta_{sang} = 4\ 10^{-3}$ Pl ; $\mu_{sang} \approx \mu_{eau}$.

| Type de vaisseau | Diamètre $d_i$ (mm) | Nombre $n_i$ |
|---|---|---|
| Aorte | 10 | 1 |
| Branches secondaires | 0,6 | 1800 |
| Branches terminales | 0,03 | $13.10^6$ |
| Capillaires | 0,008 | $1{,}2.10^9$ |

Déterminer la résistance linéique de ces quatre types d'artère (pour l'ensemble de ces vaisseaux en parallèle), la puissance linéique qui y est dissipée par viscosité, la vitesse moyenne et le nombre de

Reynolds associés à l'écoulement dans ce type d'artère. Les résultats numériques seront regroupés sous forme de tableau.

**c)** La ration alimentaire moyenne est d'environ 10 MJ par jour. Que peut-on en conclure au vu des chiffres précédents ?

# Partie II – Oscillations dans un tube en U.

On considère de l'eau placée dans un tube en U de section s constante. La pression atmosphérique au dessus du liquide est de 1 bar. Lorsqu'on crée une surpression temporaire dans l'un des tubes puis qu'on la relâche, le liquide se met à osciller de manière amortie. Dans cette partie, on va envisager plusieurs modèles pour retrouver le comportement du système constitué de l'eau du tube, d'abord sans considérer de termes dissipatifs, puis en les faisant intervenir. Le tube est occupé par une longueur $\ell$ = 80 cm de liquide, de masse volumique $\mu$ = 1000 kg/m$^3$. L'accélération de pesanteur est g = 9,8 m.s$^{-2}$.

## 1) Oscillation non amortie.

On va utiliser un modèle de fluide idéal, sans dissipation visqueuse. On paramètre le problème avec la cote z de l'eau dans la partie gauche du tube.

**a)** Donner l'énergie cinétique du fluide lors de son mouvement.

**b)** On considère que l'énergie potentielle de pesanteur du système liquide est nulle à l'équilibre. Que vaut-elle alors que le liquide est à la hauteur z algébrique au dessus de la hauteur d'équilibre ?

**c)** Donner alors l'énergie mécanique totale du fluide et en déduire l'équation différentielle d'évolution de z en fonction du temps.

**d)** Déterminer la période d'oscillation $T_0$ du fluide dans le tube.

**e)** Le théorème du centre de masse permet-il d'obtenir le même résultat ? Une réponse argumentée est attendue.

**f)** Retrouver l'équation différentielle du **c)** en utilisant les théorèmes de la mécanique des fluides.

## 2) Prise en compte de l'amortissement.

Comme on s'en rend compte en faisant l'expérience, les oscillations sont amorties. On va modéliser la dissipation par un effet global du premier ordre et exploiter les résultats d'un montage expérimental pour estimer l'importance de la dissipation.

**a)** On considère que la puissance dissipée lors du mouvement est $\alpha\mu s\ell\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ où $\alpha$ est un coefficient positif. Utiliser les résultats du **1)** pour établir un bilan de puissance durant le mouvement. Trouver la nouvelle équation différentielle régissant l'évolution de z.

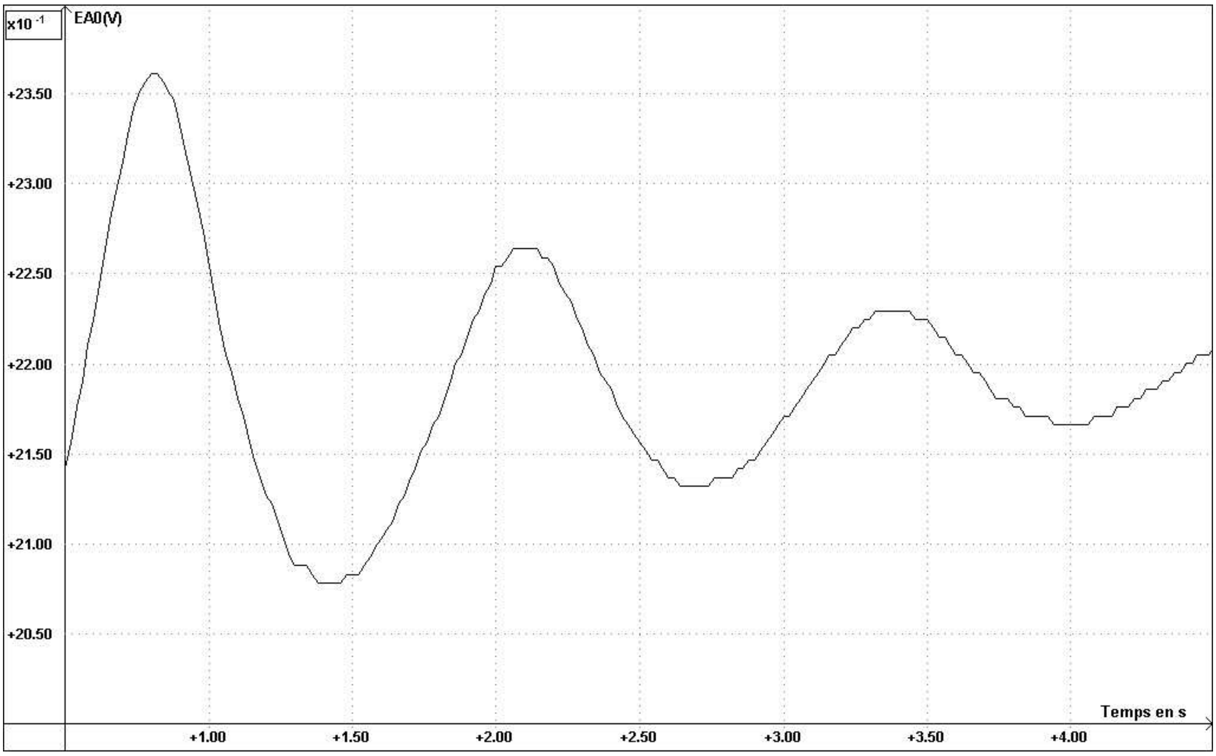
**b)** Il existe une valeur de $\alpha$ critique, $\alpha_C$, à partir de laquelle les oscillations ne se font plus. Déterminer l'inégalité que doit vérifier $\alpha$ et $\alpha_C$ pour que les oscillations se développent et la valeur de $\alpha_C$. Pour quels types de liquide peut-on être dans le cas où les oscillations ne se développent pas ?

**c)** On va considérer que la surpression est relâchée instantanément à t = 0 alors que le système est immobile avec z(0) = a. Déterminer l'évolution de z(t) dans le cas des oscillations amorties.

## 3) Dispositif expérimental.

Pour pouvoir repérer le niveau de liquide dans le tube, on place deux fils de cuivre de diamètre d = 1 mm éloignés de e = 2 mm parallèlement dans le tube de gauche. On remplit le tube d'une solution de NaCl de concentration C = 0,1 $mol.L^{-1}$ est on relie les deux fils en cuivre à un générateur basse fréquence (GBF) utilisé en continu. La tension U aux bornes des fils est relevée grâce à une carte d'acquisition. Le relevé de tension U est fourni ci-dessous sous la dénomination EA0. On mesure à vide une différence de potentiels E = 10 V aux bornes du GBF. On suppose que la résistance mesurée est telle que $R = R_0 + az$. A l'équilibre, la hauteur de fil immergée est h = 14 cm.

On donne les conductivités molaires : $\lambda^0(Na^+) = 5{,}0\ mS.m^2.mol^{-1}$ et $\lambda^0(Cl^-) = 7{,}6\ mS.m^2mol^{-1}$.




**a)** Pour estimer l'ordre de grandeur de $R_0$, On assimile cette résistance à celle d'une portion de liquide de hauteur h et de largeur d et de longueur e (on néglige la résistance des fils de cuivre, leur aspect cylindrique et les effets de bord). Donner les valeurs littérale et numérique de $R_0$ que l'on peut alors estimer.

**b)** Estimer grâce à la courbe la tension $U_0$ qu'on pourrait relever à l'équilibre (la construction n'est pas à rendre avec la copie). A quelle caractéristique du GBF (notée $R_g$) est lié le fait que cette tension ne soit pas de 10V ? Faire un schéma électrique du montage incluant E, R et $R_g$. Déterminer U en fonction de E, R et $R_g$. Déterminer $R_g$ sachant que la résistance qu'on mesure à l'équilibre sous ce mode de fonctionnement est $R_0 = 14\ \Omega$.

**c)** Expliquer pourquoi la tension relevée varie avec z. Ces variations sont-elles linéaires ?Déterminer une relation linéaire liant les données à z. Une courbe y(t) qui convient est fournie en annexe et pourra être rendue avec la copie si on y effectue des tracés et des mesures. Donner une expression possiblede y(t) en fonction des données.

**d)** Tracer sur y(t) les courbes enveloppes traduisant l'amortissement et les utiliser pour tracer la valeur vers laquelle tend y à t infini. Déterminer alors la pseudo période T de l'oscillation du liquide.

**e)** Définir et déterminer la valeur du décrément logarithmique. En déduire $\alpha$ et $T_o$, période propre de l'oscillateur. Comparer au résultat théorique précédent sur $T_0$.

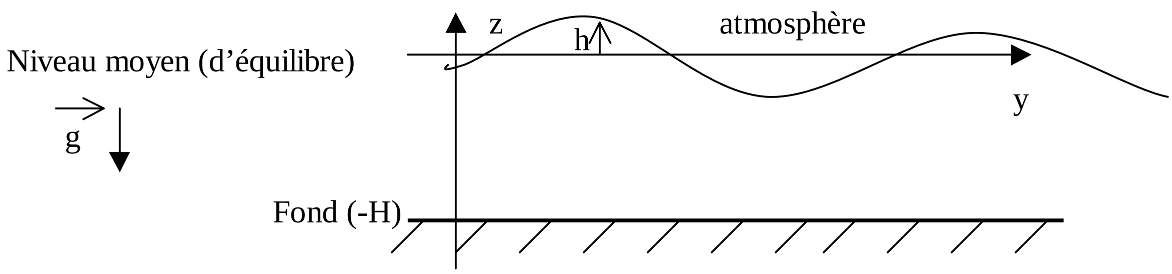
**f)** Quel peut être l'intérêt du modèle développé en **1)** ?

# partie III - Ondes de surface.

On va s'intéresser aux ondes de surface qui se propagent sur l'eau. Après avoir établi les équations de propagation de ces ondes, on s'intéressera à l'énergie qu'elles transportent puis a leur réflexion sur une paroi fixe. Le fluide sera considéré comme idéal dans toute cette partie.

## 1) Etablissement des équations d'onde.

On va considérer que l'eau, incompressible, ne subit aucun courant permanent et que le déplacement des ondes se fait dans un bassin de profondeur constante H (le fond est plat). La pression atmosphérique est $P_0 = 1$ bar. Le but de cette partie est d'obtenir les équations linéarisées liées au passage de l'onde. On repère l'altitude de la surface libre par h(y,t) en un point repéré par y (dans la suite, on notera h en omettant dans la notation la dépendance en y et en t). Le problème sera traité en ne considérant aucune propagation en x. Les termes d'ordre un seront h et v, norme de la vitesse.




**a)** Donner l'équation du mouvement d'une particule fluide lors du déplacement de l'eau au passage de l'onde. La simplifier en ne conservant que les termes d'ordre un.

**b)** On va approcher la pression dans le fluide en l'assimilant à la pression hydrostatique. Déterminer P en fonction de z et h.

**c)** Dans le cadre de la linéarisation, on ne s'intéresse qu'au terme de vitesse suivant l'axe Oy : $v_y$. Déduire de ce qui précède une relation différentielle entre $v_y$ et h. La vitesse $v_z$ peut-elle être nulle ? Quelle est la dépendance de $v_y$ en z ?

**d)** Considérons une colonne fixe comprise entre y et y + dy sur une largeur $\ell$ en x. Déterminer le volume d'eau dV qu'elle contient. Faire un bilan de matière sur la colonne et en déduire une nouvelle relation différentielle entre $v_y$ et h. Linéariser cette relation.

**e)** Déduire de ce qui précède les équations d'évolution de $v_y$ et h en fonction de y et t. Déterminer C la célérité des ondes qui se propagent dans le cadre de ce modèle. Donner la forme générale des solutions de l'équation en h (on ne demande pas la démonstration). Interpréter les termes de cette solution.

**f)** En supposant que l'expression de C reste valable, expliquer qualitativement pourquoi les vagues se brisent en arrivant près de la plage.

## 2) Onde sinusoïdale.

On va considérer une onde incidente qui se propage dans le sens des y croissants, sinusoïdale de période T et d'amplitude $a_i$ en h. Numériquement, on prend H = 5 m, $a_i$ = 0,50 m et T = 6 s.

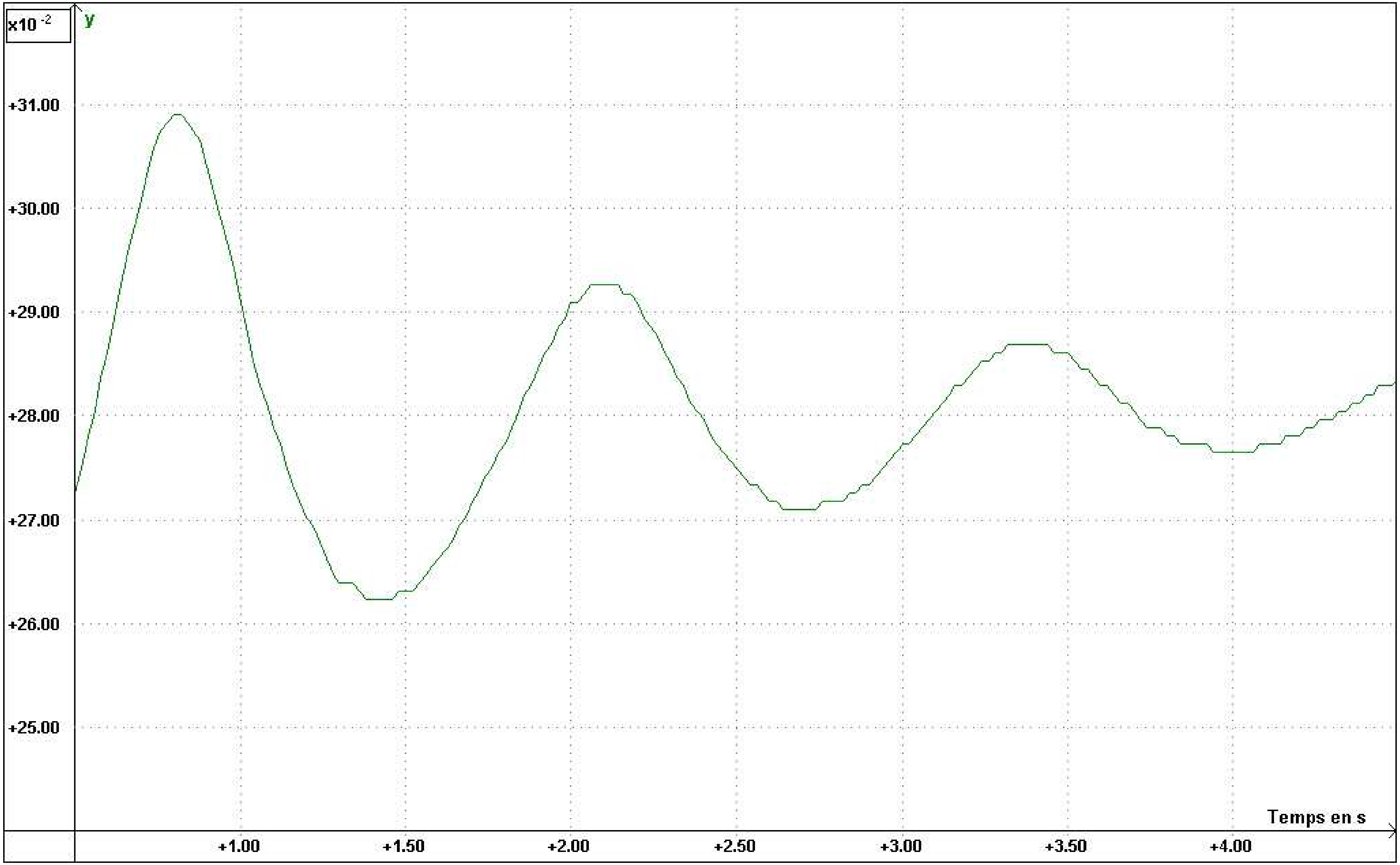
**a)** Donner $h_i(y,t)$ et $v_{iy}(y,t)$. Quelle est la valeur de l'amplitude de la vitesse dans l'onde incidente ? Que vaut la longueur d'onde $\lambda$ ?

**b)** Estimer la vitesse verticale obtenue ici et la comparer à $v_y$. Conclure.

**c)** L'onde arrive sur une jetée orientée suivant Ox, située en y = 0 et s'y réfléchit. Quelles sont les conditions aux limites du système qui se développent sur la jetée ? En déduire l'expression de l'onde réfléchie pour $h_r(y,t)$ et $v_{ry}(y,t)$.

**d)** Donner alors l'expression générale de h(y,t) et $v_y(y,t)$ autour de la jetée. Comment nomme-t-on ce type d'onde et pourquoi ?

**e)** Quel phénomène important n'a pas été pris en compte pour la propagation des ondes océaniques ? Donner un exemple de type d'onde océanique de période beaucoup plus grande que T = 6 s.


x10 -2
y
+31.00
+30.00
+29.00
+28.00
+27.00
+26.00
+25.00
Temps en s
+1.00
+1.50
+2.00
+2.50
+3.00
+3.50
+4.00